مدار های الکتریکی کوانتومی

فهرست مطالب

نمادها و نام‌گذاری

فهرست ثابت‌ها

h و $\hbar$	ثابت پلانک و ثابت کاهش‌یافته‌ی پلانک:

$$\hbar = \frac{h}{۲\pi}$$

e	بار الکترون
m_e	جرم الکترون
$\Phi_.$	کوانتوم شار ابررسانایی:

$$\Phi_. = \frac{h}{۲e}$$

c	سرعت نور
k_B, T	ثابت بولتزمن و دما:

$$\beta = \frac{۱}{k_B T}$$

فهرست نمادها

$\mathcal{L}$	لاگرانژی
$\mathscr{L}$	چگالی لاگرانژی
$\mathcal{H}$	هامیلتونی کلاسیکی
H	هامیلتونی کوانتومی
C	ظرفیت خازنی
E_C	انرژی شارژ متناظر با یک ظرفیت خازنی C:

$$E_C = \frac{e^۲}{۲C}$$

L	القاوری
E_L	انرژی القایی متناظر با یک القاگر L:

$$E_L = \frac{\Phi_۰^۲}{۴\pi^۲ L}$$

E_J	انرژی جوزفسون متناظر با یک پیوند جوزفسون:

$$E_J = \frac{\Phi_۰ I_c}{۲\pi}$$

که در آن I_c جریان بحرانی است.

L_J	القاوری جوزفسون متناظر با یک پیوند جوزفسون:

$$L_J = \frac{\Phi_۰^۲}{۴\pi^۲ E_J}$$

$\Phi(t)$	شار
$\phi(t)$	شار کاهش‌یافته، یا شار بی‌بُعد:

$$\phi(t) = \frac{۲\pi\Phi(t)}{\Phi_۰} = \frac{۲e\Phi(t)}{\hbar}$$

$\varphi(t)$	فاز در بازه‌ی $[۰, ۲\pi)$
$Q(t)$	بار
$q(t)$	بار کاهش‌یافته، یا بار بی‌بُعد:

$$q(t) = \frac{Q(t)}{۲e}$$

$v(t)$، $V(s)$	ولتاژ در حوزه‌ی زمان، و به‌ترتیب در حوزه‌ی لاپلاس
$i(t)$، $I(s)$	جریان در حوزه‌ی زمان، و به‌ترتیب در حوزه‌ی لاپلاس
$z(t)$، $Z(s)$	امپدانس در حوزه‌ی زمان، و به‌ترتیب در حوزه‌ی لاپلاس
$y(t)$، $Y(s)$	ادمیتانس در حوزه‌ی زمان، و به‌ترتیب در حوزه‌ی لاپلاس
X, Y, Z و	سه ماتریس پائولی ۲×۲ و ماتریس همانی یا عملگر همانی

فصل ۱

مقدمه

«و من شروع کردم به اندیشیدن عمیق درباره اینکه چگونه می‌توان قوانین مکانیک را به‌گونه‌ای تغییر داد که با این نا-جابجایی سازگار شوند.»

پل دیراک، درس ۱ از مکانیک کوانتومی، ۱۹۷۵

نظریه‌ی کلاسیک مدارها و شبکه‌های الکتریکی، یک حوزه‌ی بسیار تثبیت‌شده و شناخته‌شده است [۱، ۲]. در طول ۳۰ سال گذشته، با انگیزه‌ی تلاش برای ساخت پردازنده‌های کوانتومی ابررسانا، نظریه‌ای درباره‌ی مدارهای الکتریکی کوانتومی شکل گرفته است که به آن الکترودینامیک کوانتومی مداری یا circuit QED گفته می‌شود. کارهای پیشگامانه‌ی اولیه برای ساخت یک نظریه‌ی شبکه‌ی کوانتومی برای مدارهای الکتریکی، با استفاده از کوانتیزه‌سازی کانونی، توسط Yurke و Denker انجام شد [۳]. در پردازش اطلاعات کوانتومی، مدارهای مورد بحث ابررسانا هستند و پیوند جوزفسون نقش مرکزی در آن‌ها دارد.

هدف نظریه‌ی مدار، مدل‌سازی و توصیف دینامیک تراشه‌های ابررساناست؛ تراشه‌هایی که در آن‌ها بعضی از عناصر به‌راحتی با توصیف عنصر متمرکز قابل مدل‌سازی هستند، مانند خازن‌ها و القاگرها. ساختارهای ابررسانای دیگری که با آن‌ها روبه‌رو خواهیم شد شامل رزوناتورهای هم‌صفحه‌ای، خطوط انتقال و تقویت‌کننده‌ها هستند که همگی در ناحیه‌ی مایکروویو، تقریباً بین ۳۰۰ مگاهرتز تا ۱۰ گیگاهرتز، کار می‌کنند.

هدف این نظریه این است که یک توصیف کوانتومی از مهم‌ترین درجات آزادی سیستم ارائه دهد. کمیت‌های اصلی که باید استخراج و مطالعه شوند، لاگرانژی و هامیلتونی هستند که این درجات آزادی را کنترل می‌کنند. مفاهیم مرکزی در نظریه‌ی کلاسیک شبکه، مانند امپدانس و ماتریس‌های پراکندگی، می‌توانند برای به‌دست آوردن توصیف هامیلتونی و لاگرانژیِ بخش بدون اتلاف مدارها استفاده شوند. همچنین روش‌های تحلیل، چه کلاسیکی و چه کوانتومی، می‌توانند برای مدارهای ناهموردا یا غیرمتقابل توسعه داده شوند. اتلاف‌ها نیز بعداً می‌توانند وارد مدل شوند و در نظریه‌ی کوانتومی با استفاده از معادلات دینامیکی مانند معادله‌ی مستر لیندبلاد توصیف شوند.

۱-۱ نمای کلی

در این فصل، روش کوانتیزه‌سازی کانونی برای مدارهای الکتریکی را معرفی می‌کنیم؛ روشی که با نام کوانتیزه‌سازی مدار circuit quantization نیز شناخته می‌شود [۴–۶]. هدف کلی این روش آن است که یک مدار الکتریکی بدون اتلاف را بر حسب یک لاگرانژی توصیف کند؛ لاگرانژی‌ای که به درجات آزادی مناسب و مستقل مدار وابسته است. این لاگرانژی دینامیک مدار را تعیین می‌کند؛ همان‌طور که خواننده احتمالاً تصور می‌کند، این دینامیک با قوانین شناخته‌شده‌ی کیرشهف برای جریان‌ها و ولتاژها متناظر است. همان‌گونه که در پیوست A توضیح داده شده است، از روی لاگرانژی می‌توان یک هامیلتونی به‌دست آورد و سپس با تبدیل متغیرها به عملگرهایی با روابط جابه‌جایی مناسب، سیستم را کوانتیزه کرد. همان‌طور که خواهیم دید، از آنجا که فرض می‌کنیم مدار از ماده‌ی ابررسانا ساخته شده است، دو افزودنی اصلی نسبت به نظریه‌ی استاندارد کوانتیزه‌سازی کانونی مدارهای الکتریکی لازم است: وجود یک عنصر اضافی و غیرخطی، یعنی پیوند جوزفسون، و شرط اضافی کوانتیزه شدن شار، یا دقیق‌تر کوانتیزه شدن fluxoid [۷، ۸].

ابتدا با معرفی مفهوم شاخه branch شروع می‌کنیم و به‌طور خاص، دو نوع اصلی شاخه‌ها، یعنی شاخه‌های خازنی

و القایی، و انرژی‌های مربوط به آن‌ها را بررسی می‌کنیم. این عناصر بنیادی، بلوک‌های سازنده‌ی مدارهای بزرگ‌تر را تشکیل خواهند داد. سپس چند نمونه از مدارهای ساده را ارائه می‌دهیم و برای ایجاد شهود اولیه، با نوسان‌گر LC شروع می‌کنیم. پس از آن، به توصیف روند کلی می‌پردازیم و توضیح می‌دهیم که چگونه می‌توان حضور شارهای خارجی و همچنین منابع ولتاژ یا جریان را در این چارچوب در نظر گرفت.

فصل ۲

لاگرانژی‌ها و هامیلتونی‌ها برای مدارهای الکتریکی

در این فصل، روش کوانتیزه‌سازی کانونی برای مدارهای الکتریکی را معرفی می‌کنیم؛ روشی که با نام کوانتیزه‌سازی مدار circuit quantization نیز شناخته می‌شود [۴–۶]. هدف کلی این روش آن است که یک مدار الکتریکی بدون اتلاف را بر حسب یک لاگرانژی توصیف کند؛ لاگرانژی‌ای که به درجات آزادی مناسب و مستقل مدار وابسته است. این لاگرانژی دینامیک مدار را تعیین می‌کند؛ همان‌طور که خواننده احتمالاً تصور می‌کند، این دینامیک با قوانین شناخته‌شده‌ی کیرشهف برای جریان‌ها و ولتاژها متناظر است. همان‌گونه که در پیوست A توضیح داده شده است، از روی لاگرانژی می‌توان یک هامیلتونی به‌دست آورد و سپس با تبدیل متغیرها به عملگرهایی با روابط جابه‌جایی مناسب، سیستم را کوانتیزه کرد. همان‌طور که خواهیم دید، از آنجا که فرض می‌کنیم مدار از ماده‌ی ابررسانا ساخته شده است، دو افزودنی اصلی نسبت به نظریه‌ی استاندارد کوانتیزه‌سازی کانونی مدارهای الکتریکی لازم است: وجود یک عنصر اضافی و غیرخطی، یعنی پیوند جوزفسون، و شرط اضافی کوانتیزه شدن شار، یا دقیق‌تر کوانتیزه شدن fluxoid [۷، ۸].

ابتدا با معرفی مفهوم شاخه branch شروع می‌کنیم و به‌طور خاص، دو نوع اصلی شاخه‌ها، یعنی شاخه‌های خازنی و القایی، و انرژی‌های مربوط به آن‌ها را بررسی می‌کنیم. این عناصر بنیادی، بلوک‌های سازنده‌ی مدارهای بزرگ‌تر را تشکیل خواهند داد. سپس چند نمونه از مدارهای ساده را ارائه می‌دهیم و برای ایجاد شهود اولیه، با نوسان‌گر LC شروع می‌کنیم. پس از آن، به توصیف روند کلی می‌پردازیم و توضیح می‌دهیم که چگونه می‌توان حضور شارهای خارجی و همچنین منابع ولتاژ یا جریان را در این چارچوب در نظر گرفت.

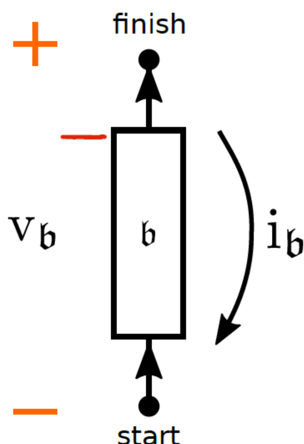
۲-۱ ولتاژهای شاخه‌ای و شارهای شاخه‌ای

همان‌طور که در بالا توضیح داده شد، برای اعمال کوانتیزه‌سازی کانونی به یک مدار الکتریکی، باید لاگرانژی آن را تعیین کنیم؛ لاگرانژی‌ای که با معادلات حرکت شناخته‌شده‌ی کلاسیکی، یعنی قوانین کیرشهف، سازگار باشد. در اینجا فرض می‌کنیم مدارهایی که بررسی می‌کنیم بدون اتلاف هستند و بنابراین دینامیک آن‌ها پایستار انرژی است. نشان خواهیم داد که حتی می‌توان یک لاگرانژی کلاسیکی را به عناصری نسبت داد که منشأ میکروسکوپی آن‌ها ریشه در مکانیک کوانتومی دارد و در نتیجه مشابه کلاسیکی مستقیمی ندارند؛ مانند پیوند جوزفسون. در واقع، همچنان می‌توانیم از معادلات حرکت شناخته‌شده، که بیانگر دینامیک بنیادی ابررساناها هستند، استفاده کنیم تا یک لاگرانژی کلاسیکی به‌دست آوریم. در این فصل، عمدتاً خود را به عناصر مداری‌ای محدود می‌کنیم که به‌صورت شاخه branch هستند، در حالی که در فصل ۶ عناصر مداری کلی‌تری را بررسی خواهیم کرد. مجموعه‌ی شاخه‌ها و گره‌ها یک گراف را تشکیل می‌دهد که همان گراف مدار الکتریکی G است.

کار را با بیان چند قرارداد و شناسایی متغیرهای دینامیکی مرتبط آغاز می‌کنیم. یک شاخه‌ی کلی از نوع عنصر متمرکز در شکل ۲-۱ نشان داده شده است. در یک مدار الکتریکی، هر شاخه با ولتاژ $v_b(t)$ دو سر شاخه و جریان $i_b(t)$ عبوری از شاخه مشخص می‌شود.

شاخه‌های یک مدار الکتریکی ابررسانا می‌توانند خازن‌ها، القاگرها، پیوندهای جوزفسون، یا منابع ولتاژ و جریان باشند. همه‌ی این شاخه‌ها، به‌جز منابع ولتاژ و جریان، عناصر پایستار هستند؛ به این معنا که انرژی را ذخیره یا حفظ می‌کنند و آن را تلف یا افزایش نمی‌دهند. عناصر غیرفعال passive، در مقابل عناصر فعال active مانند منابع جریان

یا ولتاژ، تقویت‌کننده‌ها، یا عناصر آشکارا وابسته به زمان، انرژی را افزایش نمی‌دهند. مقاومت نمونه‌ای از یک عنصر غیرفعالِ ناپایستار است.همان‌طور که از شکل ۲-۱ می‌بینیم، هر شاخه یک عنصر دوپایانه‌ای two-terminal است؛ یعنی یالی میان دو گره یا دو پایانه.



شکل ۲-۱: شاخه‌ی کلی از نوع عنصر متمرکز b با قرارداد استانداردِ ولتاژ و جریانِ غیرفعال. گره‌های $+$ و $-$ به‌ترتیب نشان‌دهنده‌ی ولتاژهای مثبت و منفی هستند، و جریان مثبت در جهت مخالف پیکان، یعنی جهت‌گیری شاخه، جاری می‌شود.

همچنین می‌توان مدارهای الکتریکی‌ای را در نظر گرفت که دارای عناصر چهارپایانه‌ای هستند؛ همان‌طور که در شکل ۲-۲ نشان داده شده است. در این حالت، هر جفت پایانه یک درگاه port نیز نامیده می‌شود؛ برای توضیح بیشتر به بخش ۵-۱ مراجعه کنید. در چنین حالتی، ولتاژها و جریان‌های دو شاخه از نظر تابعی به یکدیگر وابسته‌اند. عناصر بنیادی دودرگاهی شامل القاگر متقابل و ترانسفورماتور ایده‌آلِ نزدیک به آن هستند که در بخش ۲-۳ بررسی می‌شوند، و همچنین ژیراتور که در فصل ۶ آن را مطالعه خواهیم کرد.

برای دقیق بودن، باید به هر شاخه یک جهت‌گیری استاندارد، یعنی یک پیکان، نسبت دهیم؛ به‌طوری‌که گراف G دارای یال‌های جهت‌دار باشد. همان‌طور که در شکل ۲-۱ نشان داده شده است، وقتی پیکان از گرهی به نام شروع start به گرهی به نام پایان finish اشاره می‌کند، متغیر جریان شاخه برابر با جریان مثبت $i_b(t)$ است که از گره پایان به گره شروع جاری می‌شود. ولتاژ دو سر شاخه به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$v_b(t) \equiv v_{\text{finish}}(t) - v_{\text{start}}(t).$$

بنابراین، با استفاده از جهت‌گیری شاخه، ولتاژ شاخه را به‌صورت اختلاف دو ولتاژ گره‌ای در نظر می‌گیریم.

به‌جای کار کردن با ولتاژها و جریان‌ها، که از دیدگاه مهندسی برق طبیعی‌تر است، برای به‌دست آوردن فرمول‌بندی لاگرانژی، با متغیرهای تعمیم‌یافته‌ی شار شاخه‌ای $\Phi_b(t)$ کار خواهیم کرد. طبق تعریف، این شار شاخه‌ای با ولتاژ دو سر شاخه به‌شکل زیر مرتبط است:

$$v_b(t) = \frac{d\Phi_b(t)}{dt}. \quad (۲\text{-}۱)$$

فرض می‌کنیم که در $t \to -\infty$ همه‌ی میدان‌های الکترومغناطیسی غایب هستند. این فرض به این معناست که ولتاژها، جریان‌ها، شارهای مغناطیسی و بارها همگی می‌توانند در $t \to -\infty$ صفر در نظر گرفته شوند. در ادامه همیشه با این فرض کار خواهیم کرد، اما هرگاه این فرض نقش مهمی داشته باشد، آن را به‌طور صریح بیان می‌کنیم. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\Phi_b(t) = \int_{-\infty}^{t} v_b(t')\, dt'. \quad (۲\text{-}۲)$$

مشابه ولتاژهای گره‌ای، می‌توان شارهای گره‌ای را نیز تعریف کرد؛ برای توضیح بیشتر به بخش ؟؟ مراجعه کنید. در نتیجه، برای یک شاخه‌ی جهت‌دار، طبق قرارداد داریم:

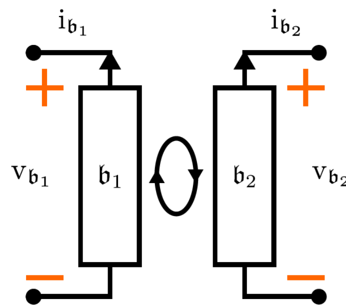
$$\Phi_b(t) = \Phi_{\text{finish}}(t) - \Phi_{\text{start}}(t), \tag{۲-۳}$$

که در آن Φ_{start} و Φ_{finish} شارهای گره‌ای در گره‌هایی هستند که در شکل ۲-۱ با نام‌های شروع و پایان مشخص شده‌اند. واحد شار شاخه‌ای وبر است؛ یعنی ۱ وبر برابر با ۱ ولت ضرب‌در ۱ ثانیه است. اگر شارهای شاخه‌ای جهت‌دار را در امتداد یک حلقه $\gamma = \partial S$ در مدار جمع کنیم، شار مغناطیسی کل عبوری از سطح S که توسط آن حلقه تعریف می‌شود، به‌دست می‌آید.

برای مدارهای ابررسانا، متغیر شار شاخه‌ای همچنین به‌طور مستقیم با افت فاز ابررسانایی روی قطعه‌ای از ماده‌ی ابررسانا که شاخه را نشان می‌دهد مرتبط است. در بخش ۲-۲-۲ و بخش‌های بعدی دوباره به این موضوع باز خواهیم گشت.

۲-۲ ساختن لاگرانژی: شاخه‌های القایی و خازنی

برای یک مدار الکتریکی معین و گراف متناظر با آن، نخستین کار این است که لاگرانژی مدار را بر حسب متغیرهای انتخاب‌شده‌ی خود، یعنی شارهای شاخه‌ای $\Phi_b(t)$، و مشتق‌های زمانی آن‌ها $\dot{\Phi}_b(t)$ بنویسیم.



شکل ۲-۲: عنصر کلی دودرگاهی two-port، یا چهارپایانه‌ای.

این متغیرها در چارچوب مکانیکی، مشابه مکان‌ها و سرعت‌ها هستند. می‌توانیم لاگرانژی را با در نظر گرفتن انرژی پتانسیل یا انرژی جنبشی ذخیره‌شده در هر عنصر پایستار به‌دست آوریم. برای عناصر مداری‌ای که در این فصل بررسی می‌کنیم، لاگرانژی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\mathcal{L} = T(\{\dot{\Phi}_b\}) - U(\{\Phi_b\}),$$

که در آن T نقش انرژی جنبشی و U نقش انرژی پتانسیل را دارد. برای فرمالیسم کلی‌ای که توضیح می‌دهد چگونه می‌توان از یک لاگرانژی، هامیلتونی به‌دست آورد و سپس سیستم را کوانتیزه کرد، به پیوست A مراجعه می‌کنیم. دلیل استفاده از متغیرهای شاخه‌ای در $\mathcal{L}$ این است که انرژی در شاخه‌ها ذخیره می‌شود، نه در گره‌ها؛ اما همان‌طور که بعداً خواهیم دید، می‌توان فرمول‌بندی را بر حسب متغیرهای گره‌ای مستقل نیز به‌دست آورد.

برای نوشتن لاگرانژی مدار الکتریکی، باید انرژی پتانسیل ذخیره‌شده در عناصر شاخه‌ای القایی و انرژی جنبشی ذخیره‌شده در عناصر شاخه‌ای خازنی را در زمان t بیان کنیم. تحلیل خود را با عناصر القایی آغاز می‌کنیم. جریانی $i_b(t)$ که در یک شاخه و در مدت‌زمان بسیار کوچک dt جاری می‌شود، باری به اندازه‌ی $dt\, i_b(t)$ را از گره پایان به گره شروع در شکل ۲-۱ منتقل می‌کند. این بار تغییر پتانسیلی برابر با $v_b(t)$ را تجربه می‌کند؛ بنابراین کار بی‌نهایت‌کوچک انجام‌شده «روی» عنصر برابر است با:

$$dW = dt\, i_b(t) v_b(t).$$

پس انرژی کل ذخیره‌شده در عنصر برابر است با:

$$U_b(t) = \int_{-\infty}^{t} dt'\, i_b(t')v_b(t'). \tag{۲-۴}$$

برای یک شاخه‌ی القایی کلی، رابطه‌ی سازنده به‌صورت زیر است:

$$i_b(t) = g\big(\Phi_b(t)\big), \tag{۲-۵}$$

که در آن g یک تابع است. برای یک القاگر خطی، تابع g خطی است؛ یعنی:

$$i_b(t) = \frac{\Phi_b(t)}{L}, \tag{۲-۶}$$

که در آن L القاوری است و واحد آن هانری است؛ یعنی وبر بر آمپر. برای یک قطعه سیم‌پیچ، القاوری می‌تواند شامل خودالقایی مغناطیسی، که به تعداد دورهای سیم‌پیچ مربوط است، به‌علاوه‌ی القاوری جنبشی باشد. القاوری جنبشی از انرژی جنبشی حامل‌های بار ناشی می‌شود. منشأ القاوری جنبشی در ابررساناها این است که متغیر فاز ابررسانایی $\varphi(t)$، که با شار مرتبط است، روی یک قطعه سیم ابررسانا یا یک شاخه تغییر می‌کند؛ همان‌طور که در یک مدار با عناصر متمرکز می‌تواند بین دو گره تغییر کند. هزینه‌ی انرژی این تغییر توسط القاوری جنبشی ماده‌ی ابررسانا توصیف می‌شود؛ همچنین به بخش ۳-۳-۴ مراجعه کنید.

بنابراین، به‌طور کلی، انرژی مغناطیسی ذخیره‌شده در یک شاخه‌ی القایی برابر است با:

$$U_b(t) = \int_{-\infty}^{t} dt'\, g\big(\Phi_b(t')\big)\frac{d\Phi_b(t')}{dt'} = \int_{\Phi_b(t=-\infty)}^{\Phi_b(t)} d\bar{\Phi}_b\, g(\bar{\Phi}_b) = G\big(\Phi_b(t)\big), \tag{۲-۷}$$

که در آن $G(\Phi_b(t))$ تابع اولیه، یا پادمشتق، است. در نتیجه، برای یک القاگر خطی داریم:

$$U_b(t) = G\big(\Phi_b(t)\big) = \frac{\Phi_b^{۲}(t)}{۲L}. \tag{۲-۸}$$

یک شاخه‌ی خازنی کلی به‌گونه‌ای تعریف می‌شود که جریان آن به‌صورت زیر داده شود:

$$i_b(t) = \frac{df\big(v_b(t)\big)}{dt}, \tag{۲-۹}$$

که در آن f یک تابع است. برای یک خازن خطی، تابع f خطی است؛ یعنی:

$$i_b(t) = C\dot{v}_b(t), \tag{۲-۱۰}$$

که در آن $C > ۰$ ظرفیت خازنی است و واحد آن فاراد، یعنی کولن بر ولت، است. این تعریف، رابطه‌ی شناخته‌شده‌ی خازن خطی را به‌دست می‌دهد:

$$Q_b = Cv_b,$$

که در آن بار به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q_b(t) = \int_{-\infty}^{t} dt'\, i_b(t'),$$

یا به‌طور معادل:

$$C\frac{dv_b(t)}{dt} = \frac{dQ_b(t)}{dt} = i_b(t).$$

برای یک خازن خطی، انرژی جنبشی آن را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$T_b(t) = \int_{-\infty}^{t} dt' \, \frac{df\big(v_b(t')\big)}{dt'} v_b(t') = \int_{v_b(t=-\infty)}^{v_b(t)} dv_b \, \frac{df(v_b)}{dv_b} v_b = \frac{۱}{۲} C v_b^۲(t) = \frac{۱}{۲} C \dot{\Phi}_b^۲(t), \quad (۲\text{-}۱۱)$$

که می‌توان آن را به‌صورت زیر نیز نوشت:

$$T_b(t) = \frac{Q_b^۲(t)}{۲C}.$$

انرژی جنبشی را همچنین می‌توان به‌عنوان انتگرال مقدار کاری در نظر گرفت که برای ایجاد تغییر بار dQ_b در حضور ولتاژ فعلی $v_b = Q_b/C$ انجام می‌شود.

در ادامه، وابستگی زمانی متغیرهای دینامیکی را به‌طور صریح نمی‌نویسیم. وابستگی زمانی را فقط داخل نمادهای انتگرال و هر جا که برای وضوح لازم باشد، به‌صورت صریح نشان خواهیم داد.

۲-۲-۱ نوسان‌گر LC و کوانتیزه‌سازی کانونی آن

نوسان‌گر LC موازی از یک خازن C تشکیل شده است که به‌صورت موازی با یک القاگر L قرار دارد؛ شکل ۲-۳ را ببینید. روشن است که ولتاژهای دو سر شاخه‌ی خازنی و شاخه‌ی القایی، به دلیل قانون ولتاژ کیرشهف، متغیرهای مستقلی نیستند؛ زیرا این ولتاژها یکسان‌اند. بنابراین فقط یک متغیر شاخه‌ای مستقل وجود دارد که آن را با Φ_b نشان می‌دهیم. این متغیر شاخه‌ای را می‌توان به‌صورت اختلاف بین دو متغیر گره‌ای نوشت:

$$\Phi_b = \Phi - \Phi_{\text{ground}},$$

که در آن Φ شار گره‌ای در گره بالایی و Φ_{ground} شار گره‌ای در گره پایینی، یعنی گره زمین، در شکل ۲-۳ است. از آنجا که فقط اختلاف بین شارهای گره‌ای اهمیت دارد، می‌توانیم به‌طور دلخواه قرار دهیم:

$$\Phi_{\text{ground}} = ۰.$$

در این حالت به‌سادگی داریم:

$$\Phi_b = \Phi.$$

در نتیجه، خازن انرژی جنبشی

$$T = \frac{C}{۲} \dot{\Phi}^۲$$

را فراهم می‌کند و القاگر انرژی پتانسیل

$$U = \frac{\Phi^۲}{۲L}$$

را به مدار می‌دهد. پس لاگرانژی برابر است با:

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{C}{۲} \dot{\Phi}^۲ - \frac{\Phi^۲}{۲L}. \quad (۲\text{-}۱۲)$$

اکنون از روشی که در پیوست ۹ توضیح داده شده است، برای تعیین هامیلتونی استفاده می‌کنیم. در پیوست ۹ می‌خوانیم که این کار مستلزم آن است که $\mathcal{L}$ تابعی محدب از $\dot{\Phi}$ باشد؛ که در اینجا به‌وضوح چنین است. بنابراین متغیر مزدوج را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} = C \dot{\Phi}, \quad (۲\text{-}۱۳)$$

که به رابطه‌ی زیر منجر می‌شود:

$$\mathcal{H} = \frac{Q^۲}{۲C} + \frac{\Phi^۲}{۲L}. \tag{۲-۱۴}$$

توجه کنید که این متغیر مزدوج دقیقاً همان چیزی است که در بالا به‌عنوان متغیر بار تعریف کردیم، اما در اینجا تعریف آن به‌صورت صوری و نه فیزیکی به‌دست می‌آید.

این هامیلتونی شبیه هامیلتونی یک نوسان‌گر هماهنگ مکانیکی است؛ با این تفاوت که Φ نقش مکان، و Q نقش تکانه را بازی می‌کند. در این تشابه، C نقش جرم را دارد و $L^{-۱}$ نقش ثابت فنر را ایفا می‌کند. معادله‌ی حرکت کلاسیکی، یعنی معادله‌ی اویلر-لاگرانژ متناظر با لاگرانژی $\mathcal{L}$، به‌صورت زیر است:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = ۰. \tag{۲-۱۵}$$

برای لاگرانژی رابطه‌ی (۲-۱۲)، این معادله به‌شکل زیر درمی‌آید:

$$C\ddot{\Phi} + \frac{\Phi}{L} = ۰, \tag{۲-۱۶}$$

که مشابه معادله‌ی حرکت یک فنر است. در این زمینه‌ی الکتریکی، می‌توان این معادله را همچنین به‌عنوان قانون جریان کیرشهف در گره بالایی تفسیر کرد؛ به این معنا که جریان عبوری از القاگر، یعنی Φ/L، از نظر اندازه با جریان عبوری از خازن، یعنی $C\ddot{\Phi}$، برابر است اما علامت مخالف دارد. توجه کنید که اگر قانون جریان کیرشهف در گره بالایی برقرار باشد، این قانون به‌طور خودکار در گره پایینی نیز برقرار است. در فرمالیسم ما، دلیل این موضوع آن است که همیشه می‌توان شار گره‌ای یک گره دلخواه، یعنی گره زمین، را برابر صفر قرار داد و در نتیجه یک متغیر را حذف کرد.

پس از شناسایی متغیرهای مزدوج، می‌توانیم سیستم را کوانتیزه کنیم و Q را با $\hat{Q}$، و Φ را با $\hat{\Phi}$ جایگزین کنیم؛ یعنی آن‌ها را به عملگرهای هرمیتی تبدیل کنیم که مقادیر ویژه‌ای در $\mathbb{R}$ دارند و رابطه‌ی جابه‌جایی زیر را ارضا می‌کنند:

$$[\hat{\Phi}, \hat{Q}] = i\hbar. \tag{۲-۱۷}$$

اکنون متغیرهای بی‌بُعد مفید برای بار و شار را نیز معرفی می‌کنیم که در سراسر این کتاب از آن‌ها استفاده خواهد شد. این متغیرها به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\phi = \frac{۲\pi\Phi}{\Phi_۰}, \tag{۲-۱۸}$$

$$q = \frac{Q}{۲e}, \tag{۲-۱۹}$$

که در آن:

$$\Phi_۰ = \frac{h}{۲e} \tag{۲-۲۰}$$

کوانتوم شار ابررسانایی است، با مقدار تقریبی:

$$\Phi_۰ \approx ۲ \times ۱۰^{-۱۵}\,\mathrm{Wb}.$$

بر حسب این متغیرها، هامیلتونی به‌شکل زیر درمی‌آید:

$$\mathcal{H} = ۴E_C q^۲ + \frac{E_L}{۲}\phi^۲, \tag{۲-۲۱}$$

که در آن انرژی شارژ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E_C = \frac{e^۲}{۲C}, \qquad (۲-۲۲)$$

و انرژی القایی برابر است با:

$$E_L = \frac{\Phi_۰^۲}{۴\pi^۲ L}. \qquad (۲-۲۳)$$

رابطه‌ی جابه‌جایی برای عملگرهای کوانتومی بازمقیاس‌شده‌ی $\hat{\phi}$ و $\hat{q}$ به‌صورت زیر است:

$$[\hat{\phi}, \hat{q}] = i. \qquad (۲-۲۴)$$

حالت‌های کوانتومی سیستم، یعنی:

$$|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} d\phi\, \psi(\phi)|\phi\rangle, \qquad (۲-۲۵)$$

با توابع مربع‌انتگرال‌پذیر $\ell^۲(\mathbb{R})$ متناظر هستند، به‌طوری‌که:

$$\int_{\mathbb{R}} d\phi\, |\psi(\phi)|^۲ < \infty.$$

همان‌طور که برای نوسان‌گر هماهنگ کوانتومی استاندارد است، می‌توان عملگر نابودی را به‌صورت زیر معرفی کرد:

$$\hat{a} = \frac{۱}{\sqrt{۲L\hbar\omega_r}}\hat{\Phi} + i\frac{۱}{\sqrt{۲C\hbar\omega_r}}\hat{Q}, \qquad (۲-۲۶)$$

که در آن ω_r فرکانس تشدید نوسان‌گر LC است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

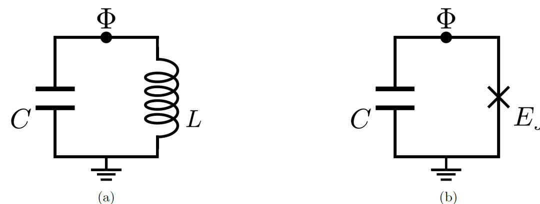
$$\omega_r = \frac{۱}{\sqrt{LC}}. \qquad (۲-۲۷)$$

عملگرهای نابودی $\hat{a}$ و آفرینش $\hat{a}^\dagger$ روابط جابه‌جایی بوزونی زیر را ارضا می‌کنند:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = . \qquad (۲-۲۸)$$

با استفاده از عملگرهای $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$، هامیلتونی را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$H = \hbar\omega_r\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{۱}{۲}\right). \qquad (۲-۲۹)$$



شکل ۲-۳: الف) نوسان‌گر LC. ب) جایگزین کردن القاگر در نوسان‌گر LC با یک پیوند جوزفسون. زمین در این شکل‌ها صرفاً انتخاب دلخواه ما برای گره مرجع را نشان می‌دهد.

در این کتاب، هنگامی که یک نوسان‌گر هماهنگ، یا حتی یک نوسان‌گر ناهماهنگ، را کوانتیزه می‌کنیم، اغلب جمله‌ی انرژی خلأ $\hbar\omega_r/۲$ در رابطه‌ی (۲-۲۹) را حذف خواهیم کرد.

می‌توانیم مشاهده کنیم که:

$$\hat{\Phi} = \Phi_{\text{zpf}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) = \sqrt{\frac{\hbar Z_۰}{۲}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \tag{۲-۳۰}$$

$$\hat{Q} = iQ_{\text{zpf}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) = i\sqrt{\frac{\hbar}{۲Z_۰}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}), \tag{۲-۳۱}$$

که در آن:

$$Z_۰ = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

امپدانس مشخصه‌ی نوسان‌گر است. ضرایب زیر:

$$\Phi_{\text{zpf}} = \sqrt{\frac{\hbar}{۲C\omega_r}} = \sqrt{\frac{\hbar Z_۰}{۲}}, \qquad Q_{\text{zpf}} = \sqrt{\frac{\hbar C\omega_r}{۲}} = \sqrt{\frac{\hbar}{۲Z_۰}}, \tag{۲-۳۲}$$

به‌ترتیب نوسانات نقطه‌ی صفر zero-point fluctuations یا zpf متغیرهای شار و بار را نشان می‌دهند. این کمیت‌ها با انحراف معیار متغیرهای متناظر در حالت خلأ متناظرند؛ زیرا اگر $\langle ۰|$ حالت خلأ باشد، داریم:

$$\langle ۰|(\Delta\hat{\Phi})^۲|۰\rangle = \Phi_{\text{zpf}}^۲, \qquad \langle ۰|(\Delta\hat{Q})^۲|۰\rangle = Q_{\text{zpf}}^۲.$$

این دو کمیت با هم رابطه‌ی عدم‌قطعیت هایزنبرگ را نیز ارضا می‌کنند:

$$(\Delta\hat{\Phi})^۲(\Delta\hat{Q})^۲ \geq \frac{\hbar^۲}{۴}.$$

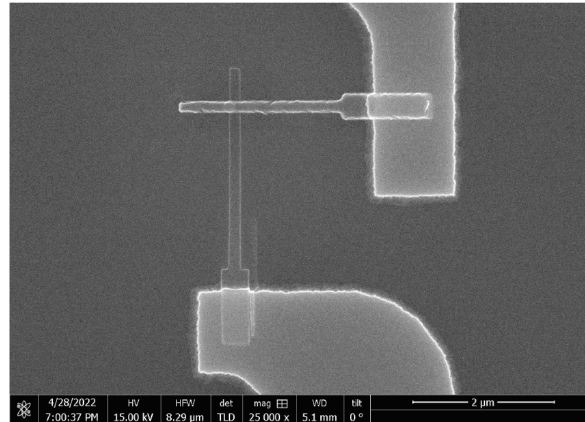
برای کامل بودن بحث، می‌توانیم عملگرهای بازمقیاس‌شده‌ی $\hat{\phi}$ و $\hat{q}$ را نیز بر حسب عملگرهای نابودی و آفرینش بیان کنیم:

$$\hat{\phi} = \phi_{\text{zpf}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) = \left(\frac{۲E_C}{E_L}\right)^{۱/۴}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \tag{۲-۳۳}$$

$$\hat{q} = iq_{\text{zpf}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) = \frac{i}{۲}\left(\frac{E_L}{۲E_C}\right)^{۱/۴}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}). \tag{۲-۳۴}$$

چرا به یک توصیف کوانتومی نیاز داریم؟

ساختارهای ابررسانا از فلزهایی مانند آلومینیوم Al، نیوبیوم Nb، تانتالوم Ta و نیترید نیوبیوم-تیتانیوم NbTiN ساخته می‌شوند که روی زیرلایه‌هایی مانند سیلیکون الگوگذاری شده‌اند. این تراشه‌ها در یخچال‌های رقیق‌ساز تا دماهای چند میلی‌کلوین سرد می‌شوند؛ دماهایی که بسیار پایین‌تر از دمای گذار ابررسانایی T_c آن‌هاست. به دلیل ابررسانا بودن، و نه فلز معمولی بودن، اتلاف بسیار کمی رخ می‌دهد؛ بنابراین یک نوسان‌گر می‌تواند دست‌کم به‌اندازه‌ی $Q = ۱۰^۵$ چرخه یا حتی بیشتر نوسان کند. دمای یخچال رقیق‌ساز بسیار کمتر از فرکانس مایکروویو است؛ با استفاده از تبدیل تقریبی $۱\ \text{GHz} \approx ۵۰\ \text{mK}$، این موضوع نشان می‌دهد که برانگیزش‌های حرارتی اثر نسبتاً کوچکی دارند. در عین حال، فوتون‌های مایکروویو انرژی بسیار کمتری از گاف ابررسانایی دارند؛ برای مثال، برای آلومینیوم حجمی در میدان مغناطیسی صفر و فشار صفر، $T_c = ۱٫۱\ \text{K}$ است [۹]. بنابراین اگر مایکروویوها را با شدت بسیار کم اعمال کنیم، که این کار با تضعیف شدید پالس‌های تولیدشده در دمای اتاق انجام می‌شود، ابررسانایی را از بین نمی‌بریم. در نتیجه، در رژیمی با تعداد کمی برانگیختگی و تعداد کمی فوتون قرار داریم؛ رژیمی که نیازمند یک توصیف کوانتومی با استفاده از ترازهای انرژی کوانتیزه‌شده است. برای توضیح بیشتر درباره‌ی اتلاف و نویز، به بخش ۵-۳ و فصل ۷ مراجعه کنید.



شکل ۲-۴: پیوند جوزفسون موسوم به سبک منهتن Manhattan-style از مرجع [۱۰]: پیوند در ناحیه‌ای تشکیل می‌شود که دو باله با یکدیگر هم‌پوشانی دارند.

۲-۲-۲ پیوند جوزفسون و جعبه‌ی جفت کوپر

یک عنصر القایی جدید برای ابررساناها، پیوند جوزفسون است؛ نمونه‌ای از این افزاره در شکل ؟؟نشان داده شده است. برای این عنصر، تابع $g(\cdot)$ در رابطه‌ی (۲-۵) غیرخطی است. معمولاً در کتاب‌های درسی، معرفی اثر جوزفسون بر حسب اختلاف فاز ابررسانایی φ میان دو ابررسانا بیان می‌شود [۸]، و نه مستقیماً بر حسب متغیرهای شار شاخه‌ای. در واقع، رابطه‌ی اول جوزفسون به‌صورت زیر است:

$$i_b = I_c \sin\varphi, \tag{۲-۳۵}$$

که در آن $I_c > ۰$ جریان بحرانی است؛ یعنی بیشینه جریانی که می‌تواند از پیوند عبور کند. با این حال، ارتباط میان اختلاف فاز ابررسانایی φ و متغیر شار شاخه‌ای Φ_b از رابطه‌ی دوم جوزفسون به‌دست می‌آید:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{۲\pi}{\Phi_۰} v_b. \tag{۲-۳۶}$$

اگر رابطه‌ی

$$\varphi = \frac{۲\pi\Phi_b}{\Phi_۰}$$

را شناسایی کنیم، می‌بینیم که رابطه‌ی دوم جوزفسون به تعریف $\dot{\Phi}_b = v_b$ تبدیل می‌شود؛ در حالی که رابطه‌ی اول جوزفسون، رابطه‌ی سازنده‌ی پیوند جوزفسون را به‌عنوان یک القاگر غیرخطی به ما می‌دهد:

$$i_b = I_c \sin\left(\frac{۲\pi}{\Phi_۰}\Phi_b\right). \tag{۲-۳۷}$$

توجه کنید که مدل‌سازی دقیق‌تر پیوند جوزفسون، در صورت نیاز، فقط می‌تواند رابطه‌ی سازنده‌ی رابطه‌ی (۲-۳۷) را تغییر دهد، نه رابطه‌ی دوم جوزفسون را؛ زیرا با توجه به رابطه‌ی فاز و شار، رابطه‌ی دوم صرفاً یک تعریف است. با این حال، شناسایی

$$\varphi = \frac{۲\pi\Phi_b}{\Phi_۰}$$

نمی‌تواند کاملاً دقیق باشد؛ زیرا φ فازی در بازه‌ی $[۰, ۲\pi)$ است، در حالی که Φ مقادیری در $\mathbb{R}$ می‌گیرد. در بخش ۴٫۱٫۱ با جزئیات بیشتری به این موضوع باز خواهیم گشت.

در روابط (۲-۳۵) و (۲-۳۷)، جریان بحرانی I_c پیوند جوزفسون به ماده، ضخامت و مساحت پیوند بستگی دارد. جریان بحرانی را می‌توان از فرمول موسوم به آمبگاوکار–باراتوف Ambegaokar-Baratoff [۱۱] در دمای صفر تخمین زد:

$$I_c = \frac{\pi\Delta}{2eR_n},$$

که در آن Δ گاف ابررسانایی و R_n مقاومت سد در حالت عادی است. تغییرات در ضخامت سد، برای پیوندی با ابعاد حدود $100\,\mathrm{nm} \times 100\,\mathrm{nm}$ و ضخامت تنها از مرتبه‌ی $O(1)\,\mathrm{nm}$، می‌تواند باعث تغییرات ٪۲ یا بیشتر در R_n شود [۱۲]. این موضوع به تغییرات در I_c و در نتیجه به تغییرات در پارامترهای کیوبیت وابسته به آن منجر می‌شود.

انرژی ذخیره‌شده در یک شاخه‌ی پیوند جوزفسون را می‌توان با استفاده از روابط (۲-۴) و (۲-۳۷) به‌دست آورد:

$$U_J = -E_J \cos\left(\frac{2\pi}{\Phi_0}\Phi_b\right), \qquad (۲-۳۸)$$

که در آن انرژی جوزفسون برابر است با:

$$E_J = \frac{\Phi_0 I_c}{2\pi}. \qquad (۲-۳۹)$$

توجه کنید که در U_J، جمله‌ی ثابت E_J را حذف کرده‌ایم. همچنین برای استفاده‌های بعدی، القاوری جوزفسون را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L_J = \frac{\Phi_0^2}{4\pi^2 E_J}. \qquad (۲-۴۰)$$

اگر انرژی U_J را حول $\Phi_b(t) = 0$ تا مرتبه‌ی دوم بسط تیلور دهیم و جمله‌ی ثابت را صرف‌نظر کنیم، به رابطه‌ی

$$U_J = \frac{\Phi_b^2}{2L_J}$$

می‌رسیم که انگیزه‌ی تعریف L_J را نشان می‌دهد.

اکنون می‌توان بررسی کرد که اگر القاگر خطی را با یک پیوند جوزفسون جایگزین کنیم چه اتفاقی رخ می‌دهد؛ شکل ۲-۳را ببینید. در این حالت، به جعبه‌ی جفت کوپر Cooper pair box یا CPB می‌رسیم. همانند بخش ۲-۲-۱، می‌توان شار شاخه‌ای Φ_b را با شار گره‌ای Φ یکی گرفت و شار گره‌ی زمین را برابر صفر قرار داد. در نتیجه لاگرانژی CPB به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}C\dot{\Phi}^2 + E_J \cos\left(\frac{2\pi}{\Phi_0}\Phi\right). \qquad (۲-۴۱)$$

معادله‌ی حرکت متناظر، یعنی معادله‌ی اویلر-لاگرانژ، برابر است با:

$$C\ddot{\Phi} + I_c \sin\left(\frac{2\pi}{\Phi_0}\Phi\right) = 0, \qquad (۲-۴۲)$$

که دوباره با قانون جریان کیرشهف متناظر است.

این سیستم یک تشابه مکانیکی مستقیم با آونگی در میدان گرانشی دارد. در واقع، می‌توان یک متغیر فاز معرفی کرد؛ یعنی:

$$\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} = \varphi + 2\pi k,$$

که در آن $\varphi \in [0, 2\pi)$ و k یک عدد صحیح، یعنی «عدد پیچش» winding number است. در این صورت سیستم با آونگی در میدان گرانشی یکسان می‌شود؛ جایی که φ زاویه‌ی بین آونگ و محور z است و نیروی گرانشی به‌صورت

$$F = -\frac{g}{l}\sin(\varphi)$$

در نظر گرفته می‌شود، که در آن l طول آونگ است. معادله‌ی حرکت چنین آونگی برابر است با:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi. \qquad (۲\text{-}۴۳)$$

بنابراین می‌توان کمیت

$$\frac{2\pi I_c}{\Phi_0 C}$$

را با g/l متناظر دانست. عدد صحیح k نیز مشخص می‌کند که آونگ چند بار یک دور کامل چرخیده است.

برای کوانتیزه کردن سیستم در رابطه‌ی (۲-۴۱)، مشابه نوسان‌گر LC، می‌توان متغیر مزدوج را به‌صورت

$$Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} = C\dot{\Phi}$$

تعریف کرد و سپس متغیرها را به عملگرهایی ارتقا داد که رابطه‌ی جابه‌جایی

$$[\hat{\Phi}, \hat{Q}] = i\hbar$$

را ارضا می‌کنند. در این صورت هامیلتونی کوانتومی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$H = \frac{\hat{Q}^2}{2C} - E_J\cos\left(\frac{2\pi}{\Phi_0}\hat{\Phi}\right). \qquad (۲\text{-}۴۴)$$

با معرفی عملگرهای شار بازمقیاس‌شده $\hat{\phi}$ و بار بازمقیاس‌شده $\hat{q}$، همانند بخش ۲-۲-۱، هامیلتونی را می‌توان به‌شکل زیر نوشت:

$$H = 4E_C\hat{q}^2 - E_J\cos\hat{\phi}, \qquad (۲\text{-}۴۵)$$

که در آن انرژی شارژ E_C همانند رابطه‌ی (۲-۲۲) تعریف شده است. طیف هامیلتونی CPB و تفسیر آن در بخش ۴-۱ با جزئیات بررسی خواهد شد.

در شکل $2,3b$، پیوند جوزفسون به‌صورت موازی با یک ظرفیت خازنی نشان داده شده است و علامت ضربدر که پیوند را نشان می‌دهد، فقط پتانسیل جوزفسون را در بر می‌گیرد. با این حال، هر پیوند جوزفسون همیشه ظرفیت خازنی ذاتی خود C_J را دارد، مستقل از اینکه یک ظرفیت خازنی شنت اضافی نیز به‌صورت موازی وجود داشته باشد یا نه. در متون علمی، برای نشان دادن این وضعیت، اغلب پیوند جوزفسون به‌شکلی مانند شکل ۲-۵ نمایش داده می‌شود. بنابراین می‌توان یک ظرفیت شنت C_s را به‌صورت موازی اضافه کرد تا ظرفیت مؤثر به‌صورت

$$C = C_J + C_s$$

افزایش یابد. اگرچه از دیدگاه نظریه‌ی مدار، چیزی تغییر نمی‌کند، اما این ملاحظات در طراحی یک کیوبیت ابررسانا اهمیت دارند؛ به‌ویژه در مورد کیوبیت ترنسمون. برای ورود به رژیم ترنسمون، که با نسبت نسبتاً بزرگ E_J/E_C مشخص می‌شود، ظرفیت ذاتی C_J کافی نیست و یک شنت خازنی اضافی لازم است.

در مثال‌های نوسان‌گر LC و CPB، دیده‌ایم که انرژی مربوط به عناصر خازنی را به‌عنوان انرژی «جنبشی» و سهم‌های القایی را به‌عنوان انرژی «پتانسیل» در تشابه مکانیکی شناسایی کرده‌ایم. با این حال، تأکید می‌کنیم که دلیل پیشینی و الزامی برای این شناسایی وجود ندارد. برای مثال، در مرجع [۱۳] یک روش کوانتیزه‌سازی دوگان dual quantization توصیف شده است که متغیرهای بار کلاسیکی Q_b و مشتق‌های زمانی آن‌ها $\dot{Q}_b$ را به‌عنوان متغیرهای دینامیکی در لاگرانژی در نظر می‌گیرد. این روش برای برخورد با پیوندهای لغزش فاز phase-slip junctions به کار می‌رود که دارای سهم انرژی غیرمحدب از نوع

$$\sim \cos\left(\frac{\pi Q_b(t)}{e}\right)$$

هستند. از آنجا که در این حالت جمله‌ی غیرمحدب در بخش پتانسیل لاگرانژی ظاهر می‌شود، می‌توان روش کوانتیزه‌سازی کانونی را دنبال کرد و یک متغیر مزدوج را با Q_b مرتبط ساخت. با این حال، این کار مستلزم آن است که مدار شامل هیچ عنصری نباشد که نسبت به

$$i_b = \dot{Q}_b$$

غیرخطی باشد؛ بنابراین نباید پیوند جوزفسون در مدار وجود داشته باشد. برای رویکردی سمپلتیک symplectic به‌منظور کوانتیزه کردن مدارهایی با عناصر غیرخطی در هر دو درجه‌ی آزادی شار و بار، خواننده را به مراجع [۱۴، ۱۵] ارجاع می‌دهیم.

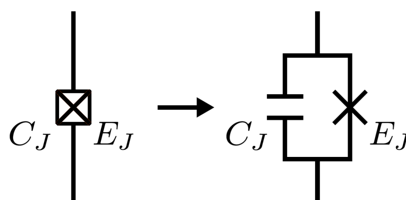
اندازه اهمیت دارد

همان‌طور که در برخی از شکل‌های افزاره‌ها در این کتاب خواهید دید، برای نمونه شکل ۴-۸، کیوبیت‌های ابررسانا مانند کیوبیت‌های ترنسمون کوچک نیستند، بلکه ابعادی خطی در حد صدها میکرومتر دارند. این موضوع را با تراشه‌های CMOS مدرن مقایسه کنید که در هر میلی‌متر مربع صدها میلیون ترانزیستور دارند. اگر بخواهیم تراشه‌های بزرگی با میلیون‌ها کیوبیت یا بیشتر بسازیم [۱۶]، اندازه به یک مسئله تبدیل می‌شود. محدودیت‌های اندازه در کیوبیت‌های ابررسانا از ساختارهایی ناشی می‌شود که باید در فرکانس‌های مایکروویو تشدید داشته باشند. برای داشتن درکی از مقیاس، طول موج متناظر با فرکانس

$$f = ۱۰\,\mathrm{GHz}$$

با سرعت نور c برابر است با:

$$\lambda = \frac{c}{f} \approx ۳\,\mathrm{cm}.$$



شکل ۲-۵: نماد فشرده برای نمایش یک پیوند جوزفسون با انرژی جوزفسون E_J و ظرفیت خازنی ذاتی آن C_J.

۲-۳ القاهای متقابل و ترانسفورماتور ایده‌آل

یک مدار الکتریکی می‌تواند شامل القای متقابل میان دو شاخه‌ی القایی نیز باشد؛ همان‌طور که در شکل ۲-۶ نشان داده شده است. منشأ چنین القای متقابلی به‌سادگی این واقعیت است که دو سیم حامل جریان می‌توانند با القای یک میدان مغناطیسی موضعی، یکدیگر را جذب یا دفع کنند. برای یک معرفی مقدماتی درباره‌ی مدارهای کوپل‌شده‌ی مغناطیسی، خواننده را به فصل ۱۳ از مرجع [۱۷] ارجاع می‌دهیم. در اینجا، تمرکز ما بر این است که چگونه این عناصر را در فرمالیسم لاگرانژی بررسی کنیم. اگر دو شاخه‌ی $b_۱$ و $b_۲$ داشته باشیم، داریم:

$$\begin{pmatrix} \Phi_{b_۱} \\ \Phi_{b_۲} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_۱ & M \\ M & L_۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{b_۱} \\ i_{b_۲} \end{pmatrix}, \qquad (۲\text{-}۴۶)$$

که در آن $L_{۱,۲} > ۰$ خودالقایی‌های رابطه‌ی (۲-۶) هستند و M القای متقابل است. اینکه ماتریس القای القاگر متقابل متقارن است، نتیجه‌ی خاصیت تقابل‌پذیری مدار است؛ برای نمونه، برای عبارت‌های صریح M در مورد سیم‌های حامل جریان، به مرجع [۱۸] مراجعه کنید. داریم:

$$M = k\sqrt{L_۱ L_۲},$$

که در آن $0 \le k < 1$ ضریب کوپلینگ است. این رابطه نشان می‌دهد که دترمینان ماتریس 2×2 در رابطه‌ی (۲-۴۶) مثبت است. از آنجا که رد این ماتریس، یعنی $L_1 + L_2$، نیز مثبت است، نتیجه می‌شود که هر دو مقدار ویژه مثبت‌اند و ماتریس وارون‌پذیر است. حد $k \to 1$ را حد کوپلینگ کامل perfect coupling می‌نامند.

اگر شاخه‌های القایی زیادی داشته باشیم و چندین برهم‌کنش دوتایی از این نوع میان آن‌ها برقرار باشد، می‌توانیم بنویسیم:

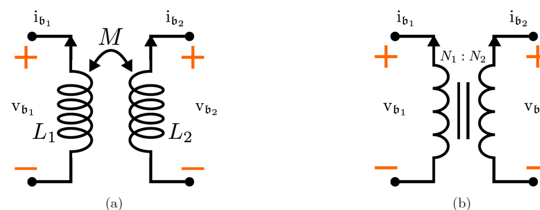
$$\mathbf{\Phi}_b = M\mathbf{i}_b, \tag{۲-۴۷}$$

که در آن $\mathbf{\Phi}_b$ یک بردار ستونی شامل همه‌ی شارهای شاخه‌ای Φ_b است، و ماتریس M مجموعی از برهم‌کنش‌های دوتایی است که هر یک به‌صورت یک زیرماتریس 2×2 میان شاخه‌های القایی نمایش داده می‌شود. توجه می‌کنیم که M یک ماتریس متقارن و مثبت‌معین با مقادیر ویژه‌ی مثبت است، زیرا از جمع زیرماتریس‌های 2×2 با همین ویژگی تشکیل شده است. سهم انرژی در لاگرانژی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$U_L = \int_{-\infty}^{t} dt'\, \mathbf{i}_b(t') \cdot \mathbf{v}_b(t') = \int_{-\infty}^{t} dt' \left(M^{-1}\mathbf{\Phi}_b(t')\right)^T \frac{d\mathbf{\Phi}_b}{dt'} = \frac{1}{2}\mathbf{\Phi}_b^T(t) M^{-1} \mathbf{\Phi}_b(t). \tag{۲-۴۸}$$

می‌بینیم که وارون‌پذیری ماتریس M، که درباره‌ی آن استدلال کردیم، برای به‌دست آوردن این عبارت لازم است. به‌طور خاص، با استفاده از وارون ماتریس در رابطه‌ی (۲-۴۶)، برای مدار شکل ۲-۶ به‌دست می‌آوریم:

$$U_L = \frac{1}{2(L_1 L_2 - M^2)} \begin{pmatrix} \Phi_{b_1} & \Phi_{b_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_2 & -M \\ -M & L_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{b_1} \\ \Phi_{b_2} \end{pmatrix}. \tag{۲-۴۹}$$



شکل ۲-۶: الف) القاگرهای کوپل‌شده‌ی مغناطیسی با خودالقایی‌های $L_{1,2}$ و القای متقابل M. ب) نماد مداری یک ترانسفورماتور ایده‌آل با نسبت دور $t_r = N_2/N_1$.

۲-۳-۱ ترانسفورماتور

اکنون عنصر مداری دیگری را معرفی می‌کنیم: ترانسفورماتور ایده‌آل. این عنصر ارتباط نزدیکی با القای متقابل میان دو شاخه‌ی القایی دارد. نماد مداری آن در شکل ۲-۶ نشان داده شده است. ترانسفورماتور ایده‌آل یک عنصر بدون اتلاف است که هیچ انرژی‌ای ذخیره نمی‌کند. این بدان معناست که باید در هر لحظه، توازن توان لحظه‌ای میان دو شاخه‌ی القایی برقرار باشد؛ که از نظر ریاضی به شرط زیر تبدیل می‌شود:

$$v_{b_1} i_{b_1} = -v_{b_2} i_{b_2}, \tag{۲-۵۰}$$

و این رابطه در هر زمان ثابت برقرار است.

این واقعیت که در ترانسفورماتور ایده‌آل هیچ انرژی‌ای ذخیره نمی‌شود، به ما می‌گوید که نباید انتظار داشته باشیم جمله‌ی انرژی متناظری برای آن در فرمالیسم لاگرانژی مدارهای الکتریکی ظاهر شود. در عوض، ترانسفورماتور ایده‌آل یک قید جبری ساده میان ولتاژهای دو سر پایانه‌ها اعمال می‌کند، و در نتیجه قید متناظر را روی شارهای مربوطه نیز تحمیل می‌کند؛ یعنی:

$$v_{b_2} = t_r v_{b_1} \quad \Rightarrow \quad \Phi_{b_2} = t_r \Phi_{b_1}, \tag{۲-۵۱}$$

که در آن $t_r \in \mathbb{R}$ ثابتی است که نسبت دورهای ترانسفورماتور ایده‌آل نامیده می‌شود. یک ترانسفورماتور ایده‌آل را می‌توان به‌صورت حدی از یک القای متقابل در نظر گرفت که در آن $L_{۱,۲} \to \infty$ و کوپلینگ کامل $k \to ۱$ برقرار است؛ تمرین ۲,۳,۱ را ببینید. اگر دو القاگر از سیم‌پیچ‌های ساده با تعداد دورهای $N_۱$ و $N_۲$ ساخته شده باشند، پارامتر t_r در حد ترانسفورماتور ایده‌آل برابر خواهد بود با:

$$t_r = \frac{N_۲}{N_۱},$$

که نام «نسبت دورها» را توجیه می‌کند.

تمرین ۱.۳.۲: ترانسفورماتور ایده‌آل با در نظر گرفتن انرژی پتانسیل رابطه‌ی (۲-۴۸) در حد مورد نظر، استدلال کنید که ترانسفورماتور ایده‌آل واقعاً همان حد $k \to ۱$ و $L_i \to \infty$ از یک مدار القای متقابل مانند شکل ۲-۶ است.

پاسخ تمرین ۱.۳.۲ مقادیر ویژه‌ی ماتریس القای متقارن M برابرند با:

$$\lambda_۱ = \frac{۱}{۲}\left(L_۱ + L_۲ - \sqrt{(L_۱ + L_۲)^۲ + ۴(k^۲ - ۱)L_۱ L_۲}\right) \approx ۰, \qquad (۲\text{-}۵۲)$$

در حد $k \to ۱$، با بردار ویژه‌ی:

$$\Phi_۱ = -\sqrt{\frac{L_۲}{L_۱}}\Phi_{b_۱} + \Phi_{b_۲}.$$

همچنین:

$$\lambda_۲ \to L_۱ + L_۲$$

با بردار ویژه‌ی:

$$\Phi_۲ = \sqrt{\frac{L_۱}{L_۲}}\Phi_{b_۱} + \Phi_{b_۲}.$$

بنابراین پتانسیل رابطه‌ی (۲-۴۸) برابر می‌شود با:

$$U_L = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{\lambda_۱}\Phi_۱^۲ + \frac{۱}{\lambda_۲}\Phi_۲^۲\right).$$

در نتیجه، یک جهت بسیار تند، در حد بی‌نهایت تند، وجود دارد که بردار ویژه‌ی آن را با شرط

$$\Phi_۱ = ۰$$

مقید می‌کند. این شرط به رابطه‌ی زیر منجر می‌شود:

$$\Phi_{b_۲} = \sqrt{\frac{L_۲}{L_۱}}\Phi_{b_۱}.$$

از آنجا که برای یک القاگر با N_i دور سیم‌پیچ داریم:

$$L_i \sim N_i^۲,$$

رابطه‌ی (۲-۵۱) را با

$$t_r = \frac{N_۲}{N_۱}$$

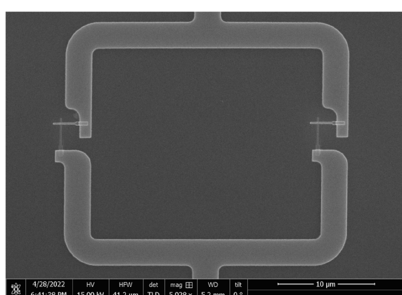
به‌دست می‌آوریم. توجه کنید که چون ترانسفورماتور ایده‌آل در غیر این صورت نباید هیچ انرژی پتانسیلی ایجاد کند، لازم است:

$$\lambda_۲ \to \infty,$$

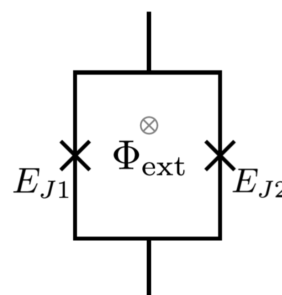
که این موضوع نتیجه می‌دهد:

$$L_۱ \to \infty, \qquad L_۲ \to \infty,$$

اما نسبت $L_۲/L_۱$ باید متناهی باقی بماند.



(a)



(b)

شکل ۲-۷: مدار SQUID که در آن شار خارجی $\Phi_{\text{ext}}(t)$ در حلقه‌ی مرکزی وابسته به زمان است. درخت پوشا با رنگ نارنجی، همراه با جهت‌گیری شاخه‌های متناظر، نشان داده شده است.

از رابطه‌ی (۲-۵۱) می‌بینیم که یک ترانسفورماتور ایده‌آل صرفاً یک قید میان شارهای شاخه‌ای اعمال می‌کند و بنابراین تعداد درجات آزادی را به‌اندازه‌ی یک کاهش می‌دهد. اگرچه ترانسفورماتور ایده‌آل یک انتزاع ریاضی است، اما در زمینه‌ی سنتز مدار، به‌عنوان حد ایده‌آل ترانسفورماتورهای واقعی مفید است. در واقع، ساختار کوئر Cauer برای شبکه‌های چنددرگاهی، که در فصل ۵ و پیوست B.۳ درباره‌ی آن بحث خواهیم کرد، می‌تواند به‌صورت یک مدار ایده‌آل از نوسان‌گرهای هماهنگ تفسیر شود که از طریق ترانسفورماتورهای ایده‌آل به درگاه‌ها کوپل شده‌اند.

۲-۴ قوانین پایستگی در گراف‌های مدار الکتریکی

مدارهای الکتریکی معمولاً شامل حلقه‌ها هستند و شارهای شاخه‌ای اطراف یک حلقه نمی‌توانند متغیرهای مستقلی باشند، زیرا افت ولتاژ حول یک حلقه باید صفر باشد. بنابراین، شارهای شاخه‌ای و مشتق‌های زمانی آن‌ها، که برای بیان محتوای انرژی در شاخه‌ها مفید هستند، همیشه متغیرهای مستقل نیستند؛ در حالی که روش کوانتیزه‌سازی کانونی در پیوست A نیاز دارد که متغیرها مستقل باشند. علاوه بر این، در برخی حلقه‌ها می‌توان شارهای مغناطیسی خارجی اعمال کرد؛ اساساً با قرار دادن یک مدار حامل جریان دیگر در نزدیکی حلقه و کوپل کردن آن به حلقه از طریق القای متقابل. برای مثال، می‌توان دو پیوند جوزفسون موازی در یک حلقه داشت، یعنی یک SQUID، که یک شار خارجی از حلقه‌ی آن عبور می‌کند؛ شکل۲-۷ را ببینید. یک مدار الکتریکی همچنین می‌تواند شامل عناصر فعال مانند منابع ولتاژ و جریان باشد، و ما می‌خواهیم بفهمیم چگونه می‌توان این عناصر را نیز در لاگرانژی وارد کرد.
در این بخش نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان با استفاده از قانون پایستگی ولتاژ کیرشهف، مجموعه‌ای از متغیرهای مستقلِ شار گره‌ای را در یک مدار الکتریکی شناسایی کرد. سپس در بخش ۲-۴بررسی می‌کنیم که چگونه منابع جریان و ولتاژ را به‌صورت نظام‌مند در لاگرانژی و هامیلتونی مدار نمایش دهیم. همچنین در بخش ۲-۵ درباره‌ی نحوه‌ی وارد کردن شارهای خارجی بحث خواهیم کرد.
یک مدار الکتریکی را در نظر بگیرید که می‌توان آن را به‌صورت یک گراف جهت‌دار G با، مثلاً، $N + ۱$ گره و M شاخه‌ی جهت‌دار در نظر گرفت. برخی شاخه‌ها ممکن است علاوه بر این، دارای القای متقابل یا کوپلینگ‌های دیگر باشند؛ اما فرض می‌کنیم که گراف همبند است. یک گره دلخواه را به‌عنوان گره زمین $n = ۰$ انتخاب می‌کنیم، به‌طوری‌که ولتاژ آن در همه‌ی زمان‌ها برابر باشد با:

$$v_۰(t) = ۰.$$

بنابراین N گره «فعال» باقی می‌ماند. انتخاب اینکه کدام گره به‌عنوان گره زمین در نظر گرفته شود، برای دینامیک اهمیتی ندارد؛ زیرا این انتخاب فقط بیان می‌کند که تنها اختلاف ولتاژها، و همچنین اختلاف شارها، از نظر فیزیکی معنادار هستند.

همان‌طور که پیش‌تر اشاره شد، جهت‌گیری هر شاخه در اصل دلخواه است، اما در ادامه آن را به شیوه‌ای مناسب ثابت می‌کنیم. می‌توان یک ماتریس وقوع incidence matrix به اندازه‌ی $N \times M$ به نام A تعریف کرد که درایه‌های a_{ij} آن به‌صورت زیر داده می‌شوند:

$$a_{ij} = +۱$$ اگر گره i به شاخه‌ی j متصل باشد و جهت شاخه از گره i دور شود،

$$a_{ij} = -۱$$ اگر گره i به شاخه‌ی j متصل باشد و جهت شاخه به‌سمت گره i باشد،

$$a_{ij} = ۰$$ در غیر این صورت.

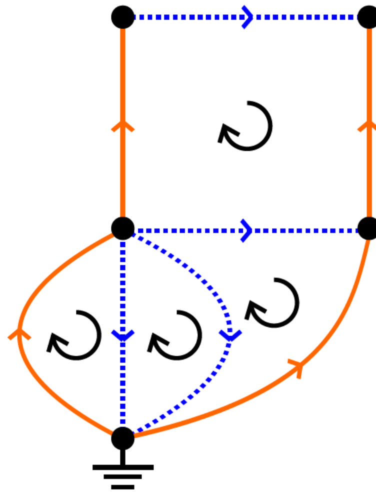
قانون جریان کیرشهف بیان می‌کند که در هر گره، مجموع جریان‌های ورودی و خروجی صفر است. بردار ستونی جریان‌های شاخه‌ای را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{i}_b = (i_{b_۱}, \dots, i_{b_M})^T,$$

که در آن T به معنی ترانهاده است. در این صورت قانون کیرشهف بیان می‌کند:

$$A\mathbf{i}_b = ۰ \qquad \text{.قانون جریان کیرشهف} \tag{۲-۵۳}$$

شرط دوم برای هر مدار الکتریکی این است که افت ولتاژ حول هر حلقه‌ی بسته صفر باشد. برای بیان این شرط، می‌خواهیم تعداد حلقه‌های مستقل در گراف مدار الکتریکی را بشماریم؛ به‌گونه‌ای که اگر افت ولتاژ برای هر یک از این حلقه‌های مستقل صفر باشد، برای هر حلقه‌ای صفر خواهد بود. شمارش این حلقه‌های مستقل، که حلقه‌های بنیادی fundamental loops نامیده می‌شوند، از چند واقعیت پایه‌ای در نظریه‌ی گراف استفاده می‌کند. نخست، یک درخت پوشا T برای گراف G انتخاب می‌شود. ویژگی تعیین‌کننده‌ی آن این است که، از یک گره مرجع، یعنی گره زمین، شروع کرده و به هر گره می‌رسد و هیچ حلقه‌ای ندارد؛ نمونه‌ای از آن در شکل ۲-۸ نشان داده شده است. توجه کنید که انتخاب درخت پوشا، همانند انتخاب گره مرجع، یکتا نیست. برای چنین درختی T، هر شاخه‌ای که در درخت قرار نداشته باشد، که به آن وتر chord گفته می‌شود، یک حلقه‌ی یکتا ایجاد می‌کند. تعداد شاخه‌های درخت پوشا برابر با N است، زیرا باید همه‌ی گره‌ها را به هم وصل کند. پس تعداد شاخه‌هایی که در درخت نیستند، یعنی تعداد وترها، برابر با $M - N$ است، و این مقدار با تعداد حلقه‌های بنیادی برابر است.



شکل ۲-۸: یک گراف G با $N+1=5$ گره، که یکی از آن‌ها به‌عنوان گره زمین انتخاب شده است، و $M=8$ شاخه؛ بنابراین $M-N=4$ حلقه‌ی بنیادی وجود دارد. شاخه‌های موجود در درخت پوشای انتخاب‌شده با رنگ نارنجی نشان داده شده‌اند. هر حلقه‌ی بنیادی با شاخه‌ای متناظر است که در درخت قرار ندارد؛ این شاخه وتر نامیده می‌شود و با خط‌چین آبی نشان داده شده است. برای راحتی، جهت هر شاخه در درخت را به‌گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که با مسیر از گره زمین انتخاب‌شده به همه‌ی گره‌های دیگر هم‌جهت باشد. جهت وترها را می‌توان به‌صورت دلخواه، اما سازگار، انتخاب کرد؛ به‌گونه‌ای که با جهت دلخواه حلقه‌هایی که می‌بندند هم‌راستا باشد. برای یک گراف مداری صفحه‌ای، طبیعی‌ترین و ساده‌ترین انتخاب این است که جهت همه‌ی حلقه‌ها یکسان باشد، و در اینجا مطابق شکل، جهت ساعت‌گرد انتخاب شده است.

با انتخاب گره زمین و درخت پوشا، به شاخه‌های موجود در درخت یک جهت‌گیری می‌دهیم؛ یعنی به‌سادگی جهت آن‌ها را دورشونده از گره زمین در نظر می‌گیریم؛ شکل ؟؟ را ببینید. فعلاً جهت‌گیری وترها را آزاد می‌گذاریم. همچنین به هر حلقه‌ی بنیادی یک جهت‌گیری، ساعت‌گرد یا پادساعت‌گرد، می‌دهیم؛ همان‌طور که در نمونه‌ی شکل ؟؟ نشان داده شده است. در اصل می‌توان این جهت‌گیری را دلخواه انتخاب کرد، زیرا فقط یک قرارداد است؛ اما برای سادگی بهتر است آن را استاندارد کنیم. این کار به ما اجازه می‌دهد ماتریس حلقه‌ی بنیادی B را تعریف کنیم. ماتریس B یک ماتریس $(M-N)\times M$ است که درایه‌های آن به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

اگر شاخه‌ی j بخشی از حلقه‌ی i باشد و جهت یکسان داشته باشد، $\quad b_{ij}=+1$

اگر شاخه‌ی j بخشی از حلقه‌ی i باشد و جهت مخالف داشته باشد، $\quad b_{ij}=-1$

در غیر این صورت. $\quad b_{ij}=0$

قانون ولتاژ کیرشهف را می‌توان به‌صورت قیدی روی بردار ولتاژ شاخه‌ای نوشت:

$$\mathbf{v}_b=(v_{b_1},\dots,v_{b_M})^T.$$

به‌طور مشخص داریم:

$$B\mathbf{v}_b=0 \qquad \text{قانون ولتاژ کیرشهف.} \tag{۲-۵۴}$$

این رابطه را می‌توان چنین خواند: هر حلقه‌ی بنیادی، که با یک سطر از B داده می‌شود، یک قید مستقل اعمال می‌کند. از آنجا که در رابطه‌ی (۲-۱) داریم:

$$\mathbf{v}_b(t)=\frac{d\mathbf{\Phi}_b}{dt},$$

و همچنین

$$\mathbf{\Phi}_b(t=-\infty)=۰,$$

از این قانون نتیجه می‌شود:

$$B\mathbf{\Phi}_b=۰. \quad (۲-۵۵)$$

این قانون نشان می‌دهد که متغیرهای دینامیکی شاخه‌ای $\Phi_b(t)$ مستقل نیستند. در واقع، تعداد متغیرهای مستقل به‌سادگی برابر با تعداد شاخه‌های درخت T است: روی M متغیر شاخه‌ای، $M-N$ قید وجود دارد و بنابراین N متغیر مستقل باقی می‌ماند. همچنین مشاهده می‌کنیم که مطابق تعریف ما از شارهای شاخه‌ای، مجموع شارهای شاخه‌ای در امتداد یک حلقه، با علامت‌های مناسب، باید صفر باشد. با این حال، در ادبیات معمولاً این شرط به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$B\mathbf{\Phi}_b=\mathbf{\Phi}_{\text{ext}}, \quad (۲-۵۶)$$

که در آن $\mathbf{\Phi}_{\text{ext}}$ برداری از شارهای خارجی متناظر با هر حلقه‌ی بنیادی است. در شکل‌ها، وقتی Φ_{ext} به داخل صفحه‌ی حلقه وارد می‌شود، باید جهت ساعت‌گرد برای حلقه انتخاب شود تا رابطه‌ی (۲-۵۶) با Φ_{ext}، و نه با $-\Phi_{\text{ext}}$، برقرار باشد. این موضوع به این دلیل است که باید با قراردادهای شکل ؟؟و رابطه‌ی (۲-۱)، قانون لنز را رعایت کنیم؛ یعنی با افزایش خطی Φ_{ext}، جریانی ایجاد می‌شود که شاری تولید می‌کند که با این افزایش مخالفت می‌کند. همان‌طور که در بخش ۲-۵ خواهیم دید، همیشه می‌توان رابطه‌ی (۲-۵۶) را به‌صورت رابطه‌ی (۲-۵۵) تفسیر کرد؛ به این صورت که یک شار شاخه‌ای اضافی مجبور می‌شود مقداری برابر با شار خارجی بگیرد.

با توجه به اینکه تعداد درجات آزادی مستقل می‌تواند کمتر از تعداد شارهای شاخه‌ای باشد، می‌توان این درجات آزادی مستقل را به‌صورت شارهای گره‌ای Φ_n در هر گره $n=۱,\ldots,N$ گراف یافت. می‌توان هر شار شاخه‌ای را با در نظر گرفتن مسیر یکتای موجود در درخت از گره n تا گره زمین $n=۰$، به یک شار گره‌ای تبدیل کرد. از آنجا که جهت‌گیری شاخه‌های موجود در این مسیر درختی همگی یکسان هستند، داریم:

$$\Phi_n=\sum_{b\in\text{Path}(۰\to n)}\Phi_b. \quad (۲-۵۷)$$

بنابراین برای دو گره مجاور $n_۱$ و $n_۲$، که با شاخه‌ای b به هم متصل‌اند و جهت‌گیری آن شاخه دورشونده از $n_۱$ است، داریم:

$$\Phi_{n_۲}-\Phi_{n_۱}=\Phi_b, \quad (۲-۵۸)$$

که با رابطه‌ی (۲-۳) سازگار است. پس می‌توان رابطه‌ی (۲-۵۸) را به‌عنوان معادله‌ی تعریف‌کننده‌ی شارهای شاخه‌ای در درخت، بر حسب متغیرهای مستقل، در نظر گرفت.

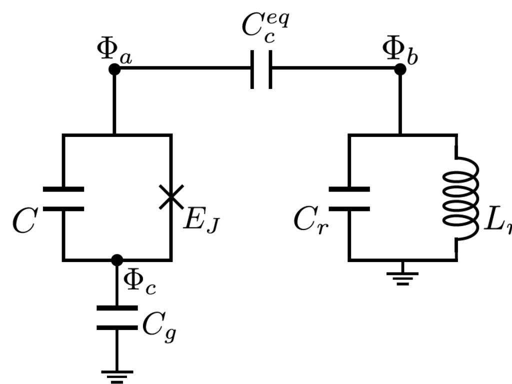
در غیاب شارهای مغناطیسی خارجیِ اعمال‌شده، متغیر شار شاخه‌ای برای هر وتر برابر با اختلاف دو شار گره‌ای مربوط به آن وتر است؛ که در آن یک جهت‌گیری دلخواه انتخاب‌شده علامت را تعیین می‌کند. در عمل، برای راحتی، می‌توان جهت‌گیری این وترها را هم‌جهت با حلقه‌ای انتخاب کرد که توسط آن‌ها بسته می‌شود. در نتیجه، مجموع شارهای شاخه‌ای در اطراف هر حلقه صفر می‌شود و رابطه‌ی (۲-۵۵) برقرار است.

در حضور شار خارجی، باید رابطه‌ی (۲-۵۶) برقرار شود؛ بنابراین همه‌ی شارهای شاخه‌ای نمی‌توانند صرفاً اختلاف بین شارهای گره‌ای باشند، زیرا باید قید شار خارجی نیز وارد شود. پس می‌توان این قید را به‌طور مناسب از طریق شاخه‌ی وتر وارد کرد، زیرا شاخه‌ی وتر با یک حلقه تناظر یک‌به‌یک دارد. این موضوع نشان می‌دهد که برای یک وتر که حلقه‌ی ℓ را می‌بندد، داریم:

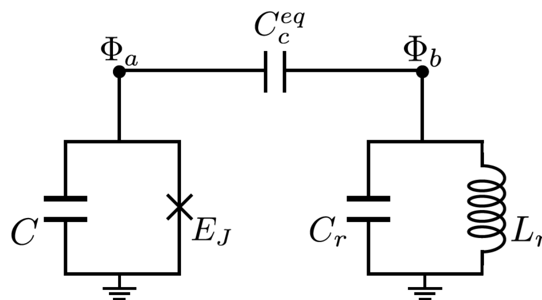
$$\Phi_{b_\ell}=\Phi_{n_۲}-\Phi_{n_۱}+\Phi_{\text{ext},\ell}. \quad (۲-۵۹)$$

بحث درباره‌ی نحوه‌ی برخورد با شارهای خارجی را در بخش ۲-۵ پس از بررسی منابع جریان، ادامه خواهیم داد.
در این کتاب گاهی جهت‌گیری شاخه‌ها یا حلقه‌ها را حذف می‌کنیم، اما می‌توان با استفاده از قرارداد استاندارد جهت‌گیری خود، بیان‌های دقیقی نوشت: (۱) یال‌های درخت پوشا دورشونده از زمین باشند، (۲) جهت حلقه‌ها ساعت‌گرد باشد، (۳) جهت وترها با جهت حلقه‌ای که می‌بندند هم‌راستا باشد، و (۴) شار Φ_{ext} به داخل صفحه اشاره کند.

تمرین ۱.۴.۲: تغییرات زمین‌کردن جعبه‌ی جفت کوپر مدار شکل ؟؟را در نظر بگیرید که یک آرایش معمولی در circuit QED را نشان می‌دهد؛ در این مدار، یک کیوبیت جعبه‌ی جفت کوپر، یا ترنسمون، به‌صورت خازنی به یک رزوناتور LC کوپل شده است. می‌بینیم که ترنسمون با رزوناتور گره زمین مشترک ندارد، اما یک خازن C_g به زمین وجود دارد. این انتخاب طراحی، برای نمونه، در آزمایشگاه DiCarlo در QuTech شهر دلفت استفاده شده است؛ جایی که ترنسمون‌ها به صفحه‌ی زمین اتصال کوتاه نشده‌اند. برای نمونه، صفحات خازنی ترنسمون در شکل (a)۸ از مرجع [۱۹] را ببینید. گروه‌های دیگر، مانند گروه Wallraff در ETH Zürich، از ترنسمون‌های زمین‌شده استفاده می‌کنند؛ برای نمونه، شکل (b)۲ در مرجع [۲۰] را ببینید که یک جزیره‌ی منفرد زردرنگ را نشان می‌دهد، یعنی محل گره Φ_a در شکل ۲-۹). این انتخاب صرفاً عملی است؛ زیرا همان‌طور که در این تمرین نشان می‌دهیم، فیزیک مسئله یکسان است. در اصل، گره بالایی ترنسمون نیز می‌تواند ظرفیتی نسبت به زمین داشته باشد، اما در اینجا برای سادگی آن را وارد نمی‌کنیم.



(a)



(b)

شکل ۲-۹: الف) ترنسمون زمین‌نشده که به‌صورت خازنی به یک رزوناتور LC کوپل شده است. ب) مدار زمین‌شده‌ی معادل.

با توجه به شکل ۲-۹، لاگرانژی را بر حسب متغیرهای

$$\Phi_۱ = \Phi_a - \Phi_c, \qquad \Phi_۲ = \Phi_b, \qquad \Phi_۳ = \Phi_c$$

بنویسید و با استفاده از فرمالیسم لاگرانژی نشان دهید که می‌توان به مدار مؤثری رسید که در آن ترنسمون نیز زمین‌شده است، همانند شکل ۲-۹. تفسیر ظرفیت کوپلینگ مؤثر C_c^{eq} چیست؟

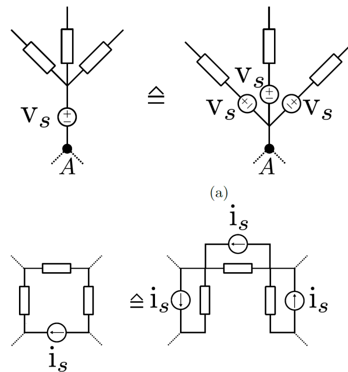
پاسخ تمرین ۱.۴.۲ لاگرانژی به‌صورت زیر است:

$$\mathcal{L}(\Phi_۱, \Phi_۲, \Phi_۳; \dot{\Phi}_۱, \dot{\Phi}_۲, \dot{\Phi}_۳) = \frac{C_g}{۲}\dot{\Phi}_۳^۲ + \frac{C}{۲}\dot{\Phi}_۱^۲ + \frac{C_r}{۲}\dot{\Phi}_۲^۲ + \frac{C_c}{۲}(\dot{\Phi}_۱ + \dot{\Phi}_۳ - \dot{\Phi}_۲)^۲ + E_J \cos\left[\frac{۲\pi}{\Phi_۰}\Phi_۱\right] - \frac{\Phi_۲^۲}{۲L_r}. \quad (۲\text{-}۶۰)$$

معادله‌ی اویلر-لاگرانژ متناظر با Φ_3 می‌دهد:

$$C_g\ddot{\Phi}_3 + C_c(\ddot{\Phi}_3 + \ddot{\Phi}_1 - \ddot{\Phi}_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\Phi}_3 = \frac{C_c}{C_g + C_c}(\dot{\Phi}_2 - \dot{\Phi}_1) + \lambda, \tag{۶۱-۲}$$

که در آن λ یک ثابت دلخواه است.



شکل ۲-۱۰: همانی‌های مداری ساده برای تبدیل منابع ولتاژ و جریان ایده‌آل به بخشی از یک شاخه، که به فرم کلی شاخه در شکل ۲-۱۱ منجر می‌شود. جعبه‌ها نشان‌دهنده‌ی عناصری هستند که می‌توانند القاگر، خازن و غیره باشند.

با جایگذاری در رابطه‌ی (۲-۶۰) به‌دست می‌آوریم:

$$\mathcal{L}(\Phi_1, \Phi_2; \dot{\Phi}_1, \dot{\Phi}_2) = \frac{C}{2}\dot{\Phi}_1^2 + \frac{C_r}{2}\dot{\Phi}_2^2 + \frac{C_c^{\text{eq}}}{2}(\dot{\Phi}_1 - \dot{\Phi}_2)^2 + E_J\cos\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}\Phi_1\right] - \frac{\Phi_2^2}{2L_r} + \frac{(C_c + C_g)\lambda^2}{2}, \tag{۶۲-۲}$$

که در آن ظرفیت کوپلینگ معادل برابر است با:

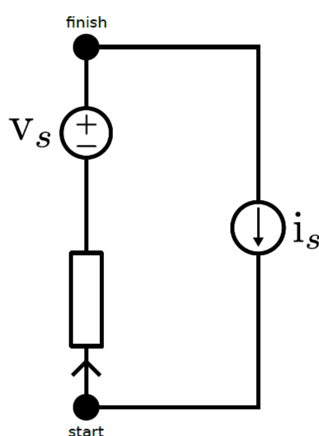
$$C_c^{\text{eq}} = \frac{C_c C_g}{C_c + C_g}. \tag{۶۳-۲}$$

جمله‌ی ثابت $(C_c + C_g)\lambda^2/2$ را می‌توان حذف کرد. توجه کنید که C_c^{eq} به‌سادگی ظرفیت معادل اتصال سری C_g و C_c است. با بازگشت به متغیرهای گره‌ای اصلی، می‌توان نوشت:

$$\mathcal{L}(\Phi_a - \Phi_c, \Phi_b; \dot{\Phi}_a - \dot{\Phi}_c, \dot{\Phi}_b) = \frac{C}{2}(\dot{\Phi}_a - \dot{\Phi}_c)^2 + \frac{C_r}{2}\dot{\Phi}_b^2 + \frac{C_c^{\text{eq}}}{2}(\dot{\Phi}_a - \dot{\Phi}_c - \dot{\Phi}_b)^2 + E_J\cos\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}(\Phi_a - \Phi_c)\right] - \frac{\Phi_b^2}{2L_r}. \tag{۶۴-۲}$$

توجه کنید که با شناسایی اختلاف $\Phi_a - \Phi_c$ با گره Φ_a در شکل ۲-۹ لاگرانژی مدار شکل ۲-۹ به‌دست می‌آید.

۵-۲ منابع جریان و ولتاژ

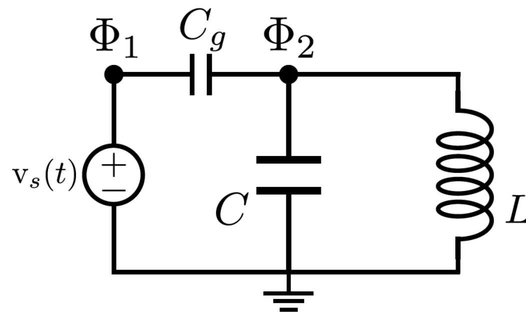


شکل ۲-۱۱: فرم کلی یک شاخه پس از اعمال همانی‌های مداری شکل ۲-۱۰. جعبه، عنصری را نشان می‌دهد که می‌تواند القاگر، خازن و غیره باشد و افت ولتاژی برابر با v_{element} روی آن قرار دارد.

در یک مدار الکتریکی، عناصر فعال مانند منابع ولتاژ و جریان نیز می‌توانند در برخی از شاخه‌ها حضور داشته باشند. در این بخش توضیح می‌دهیم که چگونه می‌توان این عناصر را در چارچوب فرمالیسم لاگرانژی بررسی کرد. نخست، یک منبع ولتاژ ایده‌آل را به‌عنوان یک عنصر دوپایانه‌ای تعریف می‌کنیم که ولتاژی، احتمالاً وابسته به زمان، برابر با $v_s(t)$ را میان پایانه‌های خود اعمال می‌کند. به‌طور مشابه، یک منبع جریان ایده‌آل یک عنصر دوپایانه‌ای است که در آن جریانی برابر با $i_s(t)$ از یک پایانه به پایانه‌ی دیگر جاری می‌شود. نمادهای الکتریکی منابع ولتاژ و جریان، که برای نمونه در شکل ۲-۱۰نشان داده شده‌اند، همواره نشان‌دهنده‌ی منابع ولتاژ و جریان ایده‌آل هستند.

همچنین اجازه دهید برخی نکات کلی دیگر درباره‌ی مدارهای الکتریکی را نیز بررسی کنیم. برای یک مدار الکتریکی معین، همیشه می‌توان آن را به‌گونه‌ای تغییر داد که هر منبع ولتاژ به‌صورت سری با یک عنصر شاخه‌ای دیگرِ پایستار انرژی قرار گیرد، در حالی که هر منبع جریان به‌صورت موازی با هر عنصر شاخه‌ای قرار داده شود؛ شکل ۲-۱۱ را ببینید. همانی‌های مداری‌ای که این کار را ممکن می‌سازند، در شکل ۲-۱۰ داده شده‌اند. همانی مداری سمت چپ به‌سادگی از افزودن یک جریان مخالف به‌صورت موازی روی هر شاخه در اطراف حلقه به‌دست می‌آید. این موضوع به فرم کلی یک عنصر شاخه‌ای از نوع نشان‌داده‌شده در شکل ۲-۱۱منجر می‌شود؛ یعنی عنصری با یک منبع جریان ایده‌آل $i_s(t)$ و یک منبع ولتاژ ایده‌آل $v_s(t)$.

۲-۵-۱ منابع ولتاژ



شکل ۲-۱۲: مدار ساده‌ای با یک منبع ولتاژ ایده‌آل و وابسته به زمان که به‌صورت خازنی به یک مدار LC کوپل شده است و اجازه می‌دهد نوسانگر هماهنگ تحریک شده و برانگیخته شود.

اجازه دهید با بررسی پیامدهای مربوط به منابع ولتاژ آغاز کنیم و بررسی منابع جریان را به بخش ۲،۵،۲ واگذار کنیم. با در نظر گرفتن شاخه‌ی کلی در شکل ۲-۱۱، می‌توان افت ولتاژ دو سر چنین شاخه‌ای را به‌صورت زیر نوشت:

$$v_b(t) = v_{\text{element}}(t) + v_s(t), \tag{۲-۶۵}$$

که در آن $v_{\text{element}}(t)$ افت ولتاژ دو سر عنصر داخل جعبه است. بر حسب شارها داریم:

$$\dot{\Phi}_b = \dot{\Phi}_{\text{element}} + v_s(t) \quad \Rightarrow \quad \Phi_b(t) = \Phi_{\text{element}}(t) + \int_{-\infty}^{t} v_s(t')\, dt'. \tag{۲-۶۶}$$

اگر عنصر موجود در شکل ۲-۱۱ یک خازن C باشد، انرژی جنبشی

$$\frac{۱}{۲} C \dot{\Phi}^{۲}_{\text{element}}$$

را به لاگرانژی اضافه می‌کند. در این صورت می‌توانیم با استفاده از رابطه‌ی (۲-۶۶)، این انرژی را بر حسب $\dot{\Phi}_b$ و ولتاژ خارجیِ اعمال‌شده $v_s(t)$، که می‌تواند وابسته به زمان باشد، بیان کنیم. اگر عنصری که با منبع ولتاژ سری شده است القایی باشد، انرژی پتانسیل $U(\Phi_{\text{element}})$ را به لاگرانژی اضافه می‌کند و می‌توانیم با استفاده از رابطه‌ی (۲-۶۶)، Φ_{element} را بر حسب Φ_b و انتگرال زمانی ولتاژ بیان کنیم. این موضوع می‌تواند باعث شود لاگرانژی وابستگی زمانی صریح داشته باشد و در نتیجه به یک هامیلتونیِ صریحاً وابسته به زمان منجر شود. شکل ۲-۱۲ نمونه‌ای از یک نوسانگر LC را نشان می‌دهد که به‌صورت خازنی به یک منبع ولتاژ وابسته به زمان کوپل شده است.

توجه کنید که متغیر شاخه‌ای $\dot{\Phi}_b$ یا Φ_b می‌تواند بخشی از یک شبکه‌ی بزرگ‌تر، مثلاً یک حلقه، باشد و بنابراین جمله‌های دیگر لاگرانژی نیز ممکن است به آن وابسته باشند. با استفاده از رابطه‌ی (۲-۶۶) می‌توان این وابستگی را به وابستگی به Φ_{element} و $v_s(t)$ کاهش داد. به‌طور کلی، یک منبع ولتاژ می‌تواند خود ناشی از یک مدار الکتریکی کوانتیزه‌شده‌ی دیگر نیز باشد؛ مثلاً مداری الکتریکی که یک خط انتقال یا یک رزوناتور را نشان می‌دهد و می‌خواهیم آن را به‌صورت کوانتومی بررسی کنیم. در این صورت، نکته‌ی اصلی این است که می‌توان ولتاژ کلاسیکی v_s را در هامیلتونی مدار با عملگر ولتاژ کوانتومی $\hat{v}_s$ مربوط به مدار الکتریکی دیگر، که درجات آزادی کوانتومی خودش را دارد، جایگزین کرد و بدین ترتیب نمایشی از کوپلینگ آن‌ها به‌دست آورد.

همچنین یک رویکرد جایگزین را در نظر می‌گیریم که در آن یک منبع ولتاژ ثابت v_s را با یک خازن C_s جایگزین می‌کنیم و نشان می‌دهیم که در حد مناسب، برای مدار کوچک شکل ۲،۱۲، همان نتیجه‌ی استدلال بالا به‌دست می‌آید.

با در نظر گرفتن منبع ولتاژ به‌صورت یک خازن، لاگرانژی مدار برابر است با:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{۱}{۲}\begin{pmatrix}\dot\Phi_۱ & \dot\Phi_۲\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}C_s+C_g & -C_g\\ -C_g & C+C_g\end{pmatrix}}_{C}\begin{pmatrix}\dot\Phi_۱\\ \dot\Phi_۲\end{pmatrix} - \frac{۱}{۲L}\Phi_۲^۲\\ &= \frac{۱}{۲}\begin{pmatrix}\dot\Phi_۱ & \dot\Phi_۲\end{pmatrix} C \begin{pmatrix}\dot\Phi_۱\\ \dot\Phi_۲\end{pmatrix} - \frac{۱}{۲L}\Phi_۲^۲.\end{aligned} \tag{۲-۶۷}$$

در این رابطه، ماتریس ظرفیت خازنی C را تعریف کرده‌ایم. با استفاده از متغیرهای مزدوج

$$Q_۱ = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\Phi_۱} = C_s\dot\Phi_۱ - C_g(\dot\Phi_۲ - \dot\Phi_۱),$$

و

$$Q_۲ = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\Phi_۲} = C\dot\Phi_۲ + C_g(\dot\Phi_۲ - \dot\Phi_۱),$$

هامیلتونی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathcal{H} = \frac{۱}{۲}\begin{pmatrix}Q_۱ & Q_۲\end{pmatrix} C^{-۱}\begin{pmatrix}Q_۱\\ Q_۲\end{pmatrix} + \frac{۱}{۲L}\Phi_۲^۲. \tag{۲-۶۸}$$

وقتی $C_s \gg C$ و $C_s \gg C_g$، انرژی جنبشی این هامیلتونی به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}T &= \frac{۱}{CC_g + C_s(C+C_g)}\left[\frac{C+C_g}{۲}Q_۱^۲ + \frac{C_g+C_s}{۲}Q_۲^۲ + C_gQ_۱Q_۲\right]\\ &\approx \frac{Q_۱^۲}{۲C_s} + \frac{Q_۲^۲}{۲(C+C_g)} + \frac{C_gQ_۱Q_۲}{C_s(C+C_g)}.\end{aligned} \tag{۲-۶۹}$$

با استفاده از $v_s \approx Q_۱/C_s$ در حد $C_s \gg C_g$، این رابطه را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$T \approx \frac{۱}{۲(C+C_g)}\left(Q_۲ + C_gv_s\right)^۲ + \text{const.} \tag{۲-۷۰}$$

اگر به‌جای آن از رابطه‌ی (۲-۶۵) استفاده کنیم، آنگاه $\dot\Phi_۱ = v_s$ است و لاگرانژی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\mathcal{L} = \frac{C_g}{۲}(\dot\Phi_۲ - v_s)^۲ + \frac{C}{۲}\dot\Phi_۲^۲ - \frac{۱}{۲L}\Phi_۲^۲. \tag{۲-۷۱}$$

با استفاده از

$$Q_۲ = (C+C_g)\dot\Phi_۲ - C_gv_s,$$

هامیلتونی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathcal{H} = Q_۲\dot\Phi_۲ - \mathcal{L} = \frac{۱}{۲(C+C_g)}\left(Q_۲ + C_gv_s\right)^۲ + \frac{۱}{۲L}\Phi_۲^۲. \tag{۲-۷۲}$$

این هامیلتونی همان انرژی جنبشی رابطه‌ی (۲-۷۰) را دارد، صرف‌نظر از جمله‌ی ثابت انرژی که بی‌ضرر است.

تمرین ۱.۵.۲: نوسان‌گر LC تحریک‌شده با ولتاژ برای هامیلتونی رابطه‌ی (۲-۷۲)، معادلات حرکت کلاسیکی برای متغیرهای مزدوج

$$\Phi_۲(t) = \Phi(t), \qquad Q_۲ = Q(t)$$

چیست؟ فرض کنید تحریک هارمونیک به‌صورت

$$v_s(t) = V_۰ \cos(\omega t)$$

باشد. با معرفی متغیر مختلط

$$a(t) = \frac{۱}{\sqrt{۲L\omega_r}}\Phi + i\frac{۱}{\sqrt{۲C_\Sigma\omega_r}}Q,$$

معادلات حرکت را برای $Q(t)$ و $\Phi(t)$ حل کنید. این رابطه را با رابطه‌ی (۲-۲۶) مقایسه کنید، با

$$\omega_r = \frac{۱}{\sqrt{LC_\Sigma}}, \qquad C_\Sigma = C + C_g.$$

چگونه می‌توان اثر تحریک را بیشینه کرد؟

پاسخ تمرین ۱.۵.۲ از نمادگذاری زیر استفاده می‌کنیم:

$$Q_d(t) := C_g v_s(t).$$

معادلات حرکت هامیلتونی، مطابق روابط $(A.۱۴)$ و $(A.۱۵)$، معادلات کوپل‌شده‌ی حرکت برای $Q(t)$ و $\Phi(t)$ را به‌دست می‌دهند:

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q} = \frac{Q(t)+Q_d(t)}{C_\Sigma}, \qquad \dot{Q} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi} = -\frac{\Phi}{L}.$$

برای متغیر $a(t)$، معادله‌ی دیفرانسیل زیر به‌دست می‌آید:

$$\dot{a} = -i\omega_r a + \sqrt{\frac{\omega_r}{۲C_\Sigma}}\,Q_d(t), \tag{۲-۷۳}$$

که در آن $Q_d(t)$ را می‌توان بر حسب تحریک داده‌شده‌ی $v_s(t)$ بیان کرد. حل این معادله‌ی خطی، مرتبه‌ی اول و ناهمگن برابر است با:

(۲-۷۴)

$$\begin{aligned} a(t) &= a(۰)e^{-i\omega_r t} + \sqrt{\frac{\omega_r}{۲C_\Sigma}}C_g V_۰ e^{-i\omega_r t}\int_۰^t dt'\,\cos(\omega t')e^{i\omega_r t'} \\ &= a(۰)e^{-i\omega_r t} + \sqrt{\frac{\omega_r}{۲C_\Sigma}}C_g V_۰ \left[e^{i(\omega-\omega_r)t/۲}\frac{\sin\big((\omega+\omega_r)t/۲\big)}{\omega+\omega_r} + e^{-i(\omega+\omega_r)t/۲}\frac{\sin\big((\omega-\omega_r)t/۲\big)}{\omega-\omega_r}\right]. \end{aligned}$$

با گرفتن مزدوج مختلط برای به‌دست آوردن معادله‌ی متناظر برای $a^*(t)$، داریم:

(۲-۷۵)

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \frac{\sqrt{۲L\omega_r}}{۲}\big(a(t)+a^*(t)\big) \\ &= \Phi(۰)\cos(\omega_r t) + \sqrt{\frac{L}{C_\Sigma}}Q(۰)\sin(\omega_r t) \\ &\quad + \frac{C_g V_۰}{C_\Sigma}\left[\frac{\cos\big((\omega-\omega_r)t/۲\big)\sin\big((\omega+\omega_r)t/۲\big)}{\omega+\omega_r} + \frac{\cos\big((\omega+\omega_r)t/۲\big)\sin\big((\omega-\omega_r)t/۲\big)}{\omega-\omega_r}\right], \end{aligned}$$

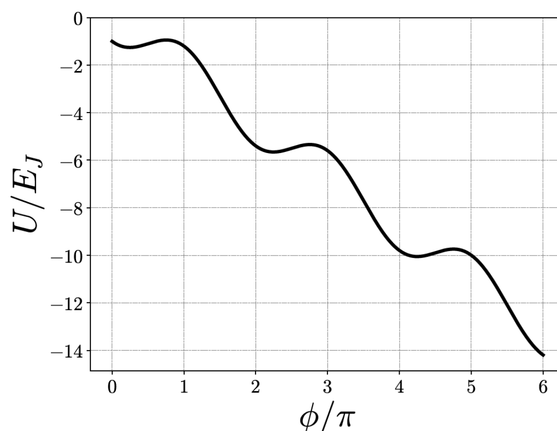
و همچنین:

$$
\begin{aligned}
Q(t) &= \frac{\sqrt{۲C_\Sigma\omega_r}}{۲i}\big(a(t)-a^*(t)\big)\\
&= -\sqrt{\frac{C_\Sigma}{L}}\Phi(۰)\sin(\omega_r t) + Q(۰)\cos(\omega_r t)\\
&\quad - ۲C_g V_۰\frac{\omega_r^۲}{\omega^۲-\omega_r^۲}\sin\big((\omega-\omega_r)t/۲\big)\sin\big((\omega+\omega_r)t/۲\big).
\end{aligned} \tag{۲-۷۶}
$$

شدت پاسخِ تحریک‌شده به‌صورت خطی با ظرفیت کوپلینگ C_g، با دامنه‌ی تحریک ولتاژی $V_۰$، و با میزان نزدیک بودن تحریک به تشدید افزایش می‌یابد؛ یعنی زمانی که

$$\omega \to \omega_r.$$

۲-۵-۲ منابع جریان



شکل ۲-۱۳: نمونه‌ای از پتانسیل واش‌بورد washboard به‌صورت $U(\phi)/E_J = i_s\phi/I_c - E_J\cos\phi$ بر حسب شار کاهش‌یافته، یا بی‌بُعد، ϕ برای $i_s/I_c = -۰٫۷$.

برای یک منبع جریان، در اصل نیازی نیست از هیچ همانی مداری استفاده کنیم؛ بلکه می‌توان منبع جریان را مستقیماً به‌عنوان یک شاخه در مدار در نظر گرفت. در هر صورت، برای شاخه‌ی شکل ۲-۱۱ همانی زیر را داریم:

$$i_b(t) = i_s(t) + i_{\text{element}}(t),$$

که در آن $i_{\text{element}}(t)$ جریانی است که از عنصر عبور می‌کند؛ یعنی همان جعبه‌ی نشان‌داده‌شده در شکل.

اگر یک منبع جریان ثابت به‌صورت موازی با یک القاگر داشته باشیم، می‌توانیم انرژی پتانسیل ناشی از هر دو، یعنی منبع جریان و القاگر، را به‌صورت زیر بنویسیم:

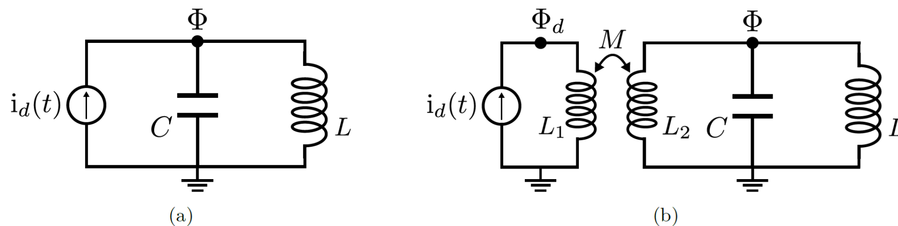
$$U = \int_{-\infty}^{t} dt'\, v_b(t') i_b(t') = i_s\int_{-\infty}^{t} dt'\, v_b(t') + U_L = i_s\Phi_b(t) + \frac{۱}{۲L}\Phi_b^۲(t). \tag{۲-۷۷}$$

به‌طور مشابه، یک پیوند جوزفسون بایاس‌شده با جریان، یعنی پیوندی که به‌صورت موازی با یک منبع جریان قرار دارد، دارای انرژی پتانسیل زیر است:

$$U = i_s\Phi_b(t) - E_J\cos\left(\frac{۲\pi}{\Phi_۰}\Phi_b(t)\right). \tag{۲-۷۸}$$

این پتانسیل اخیر ماهیت یک پتانسیل واش‌بورد washboard را دارد؛ یعنی یک جمله‌ی خطی که روی یک کسینوس نوسانی قرار گرفته است، همان‌طور که در نمونه‌ی شکل ۲-۱۳ نشان داده شده است. می‌توان مقدار جریان بحرانی I_c را با تغییر شدت منبع جریان i_s و مشاهده‌ی زمانی که دینامیک متغیر شار Φ_b به‌گونه‌ای می‌شود که به‌جای محبوس ماندن در یک چاه، از پتانسیل واش‌بورد پایین می‌غلتد، تعیین کرد. عمق این چاه توسط E_J در رابطه‌ی (۲-۳۹)، و در نتیجه توسط I_c، تعیین می‌شود. این روش نخستین بار در مرجع [۲۱] انجام شد. اولین مشاهده‌های رفتار کوانتومی ماکروسکوپی در مدارهای ابررسانا توسط Martinis، Devoret و Clarke [۲۲] برای مدار پیوند بایاس‌شده با جریان انجام شد. نخستین کیوبیت ابررسانا، که کیوبیت فاز phase qubit نامیده می‌شود، بر پایه‌ی انتخاب دو تراز پایین‌تر در یکی از چاه‌های پتانسیل واش‌بورد ساخته شده است.

باید توجه کرد که در نحوه‌ی برخورد ما با منبع جریان در مقایسه با منبع ولتاژ یک عدم تقارن وجود دارد. برای منبع جریان، انرژی پتانسیل اضافی ناشی از منبع را به لاگرانژی اضافه می‌کنیم. اما برای منبع ولتاژ، فقط انرژی جنبشی ذخیره‌شده در عنصر را به لاگرانژی اضافه می‌کنیم و از v_s برای برقرار کردن قیود قانون ولتاژ کیرشهف استفاده می‌کنیم.



شکل ۲-۱۴: الف) مدار LC تحریک‌شده با جریان. ب) مدار LC تحریک‌شده با شار.

تمرین ۲.۵.۲: نوسان‌گر LC تحریک‌شده با جریان و شار

۱. مدار شکل ۲-۱۴را در نظر بگیرید که به یک منبع جریان i_d متصل است. معادله‌ی حرکت را برای متغیر شار $\Phi(t)$ بنویسید و از آن، لاگرانژی متناظر را به‌دست آورید؛ به‌گونه‌ای که با استفاده از رابطه‌ی (۲-۷۷) سازگار باشد.

۲. مدار LC شکل ۲-۱۴را در نظر بگیرید که از طریق القای متقابل به یک منبع جریان کوپل شده است. لاگرانژی مدار را بنویسید و معادلات حرکت را برای متغیرهای Φ_d و Φ به‌دست آورید. با حذف متغیر Φ_d با استفاده از معادله‌ی اویلر-لاگرانژ آن، نشان دهید که معادله‌ی حاصل برای متغیر Φ با معادله‌ی سؤال ۱ معادل است. پس اثر منبع جریان مستقیم همانند اثر شاری است که توسط مدار کوپل‌شده‌ی القایی القا می‌شود.

پاسخ تمرین ۲.۵.۲

۱. پایستگی جریان به این معناست که:

$$C\ddot{\Phi} + \frac{\Phi}{L} = i_d.$$

این رابطه را می‌توان به‌عنوان معادله‌ی حرکت حاصل از لاگرانژی زیر به‌دست آورد:

$$\mathcal{L} = \frac{C\dot{\Phi}^۲}{۲} - \left(\frac{\Phi^۲}{۲L} - i_d\Phi\right).$$

۲. با استفاده از روابط (۲-۴۹) و (۲-۷۷)، لاگرانژی برابر است با:

$$\mathcal{L} = \frac{C}{۲}\dot{\Phi}^۲ - \frac{۱}{\Delta}\left(\frac{L_۲\Phi_d^۲}{۲} + \frac{L_۱\Phi^۲}{۲} - M\Phi\Phi_d\right) - \frac{۱}{۲L}\Phi^۲ + i_d\Phi_d,$$

که در آن:

$$\Delta = L_۱ L_۲ - M^۲ > ۰.$$

این لاگرانژی به معادلات حرکت زیر منجر می‌شود:

$$L_۲ \Phi_d - M\Phi = \Delta i_d,$$

و

$$C\ddot{\Phi} + \frac{\Phi}{L} + \frac{\Phi L_۱}{\Delta} - \frac{M\Phi_d}{\Delta} = ۰.$$

اگر متغیر Φ_d را حذف کنیم، معادله‌ی حرکت برای Φ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

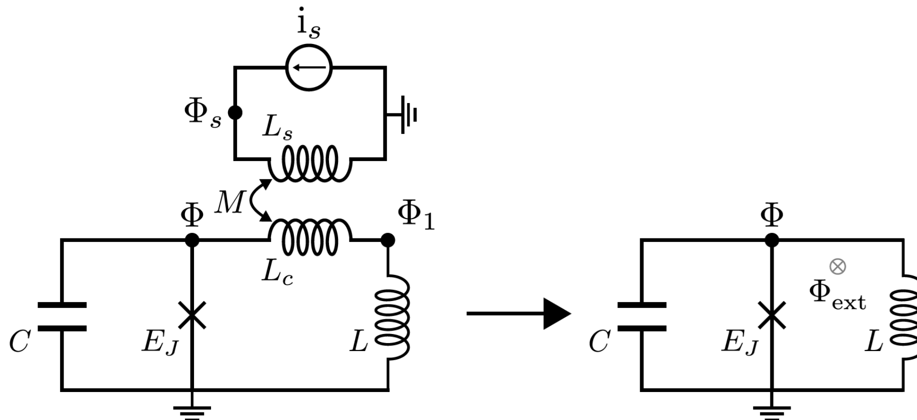
$$C\ddot{\Phi} + \left(\frac{۱}{L} + \frac{۱}{L_۲}\right)\Phi - \frac{M}{L_۲} i_d = ۰.$$

این معادله همان فرم مدار قسمت (a) را دارد، با القاوری مؤثر:

$$\frac{۱}{L_{\mathrm{eq}}} = \frac{۱}{L} + \frac{۱}{L_۲},$$

که همان رابطه‌ی القاگرهای موازی است، و با منبع جریان مؤثر:

$$\frac{M}{L_۲} i_d.$$



شکل ۲-۱۵: مدار یک CPB شنت‌شده با القاگر، همراه با شار خارجی اعمال‌شده. چپ: مدار کامل شامل منبع جریان و القای متقابل. راست: مدار معادل با شار خارجی مؤثر $\Phi_{\mathrm{ext}} = \lim_{M\to۰} M i_s$.

۲-۶ شارهای خارجی

در این بخش توضیح می‌دهیم که منظور ما از شارهای خارجی ثابت اعمال‌شده به حلقه‌ها چیست و چگونه می‌توان آن‌ها را در توصیف وارد کرد. هدف ما این است که نشان دهیم چگونه می‌توان از شرط کلی رابطه‌ی (۲-۵۵) به رابطه‌ی (۲-۵۶) رسید و تحت چه شرایطی این کار معتبر است. اجازه دهید با بررسی پیاده‌سازی فیزیکی واقعی یک شار خارجی آغاز کنیم؛ یعنی اعمال شار خارجی از طریق یک منبع جریان کلاسیکی نزدیک. برای روشن‌تر شدن موضوع، می‌توانیم حالت یک CPB شنت‌شده با القاگر را در نظر بگیریم که در شکل ۲-۱۵نشان داده شده است. در

سمت چپ این شکل، مدار فیزیکی را داریم. می‌خواهیم بفهمیم در چه حدی می‌توان منبع جریان و القای متقابل را به‌عنوان یک شار خارجی مؤثر در نظر گرفت که از حلقه‌ی تشکیل‌شده توسط پیوند جوزفسون و القاگر عبور می‌کند؛ همان‌طور که در سمت راست شکل ۲-۱۵ نشان داده شده است.

منبع جریان i_s با شار Φ_s از طریق رابطه‌ی زیر مرتبط است:

$$i_s = \frac{\Phi_s}{L_s}.$$

اکنون حدی را در نظر می‌گیریم که در آن القای متقابل به صفر میل می‌کند، در حالی که منبع جریان طوری تنظیم می‌شود که حاصل‌ضرب آن‌ها ثابت بماند؛ یعنی:

$$\Phi_{\text{ext}} = \lim_{M\to ۰} M i_s.$$

این حد، نبودِ کنش بازگشتی back action روی منبع جریان خارجی را مدل می‌کند؛ یعنی منبع جریان به‌عنوان یک منبع کلاسیکی غیردینامیکی در نظر گرفته می‌شود. با استفاده از رابطه‌ی (۲-۴۹)، انرژی پتانسیل متناظر با خودالقایی‌های L_c و L_s و القای متقابل M برابر است با:

$$U = \frac{L_c}{۲(L_sL_c - M^۲)}\Phi_c^۲ + \frac{L_s}{۲(L_sL_c - M^۲)}\Phi_s^۲ - \frac{M}{(L_sL_c - M^۲)}\Phi_s\Phi_c, \qquad (۲\text{-}۷۹)$$

که در آن شار شاخه‌ای دو سر القاگر L_c را به‌صورت زیر نامیده‌ایم:

$$\Phi_c = \Phi_۱ - \Phi.$$

در حد $M \to ۰$ و

$$\Phi_{\text{ext}} = \lim_{M\to ۰} M i_s,$$

این رابطه به‌شکل زیر درمی‌آید:

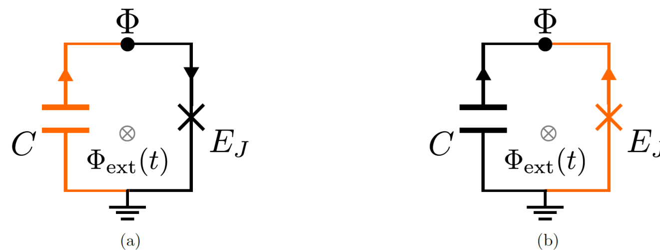
$$U(\Phi_{\text{ext}}) = \frac{۱}{۲L_c}\Phi_c^۲ + \frac{L_s}{۲}i_s^۲ - \frac{۱}{L_c}\Phi_{\text{ext}}\Phi_c = \frac{۱}{۲L_c}(\Phi_c - \Phi_{\text{ext}})^۲ + \text{const.} \qquad (۲\text{-}۸۰)$$

وقتی $L_c \to ۰$ را در نظر بگیریم، به‌گونه‌ای که این القاگر یک قطعه ماده با طول صفر را مدل کند، می‌بینیم که این انرژی پتانسیل صرفاً شرط زیر را تحمیل می‌کند:

$$\Phi_c = \Phi_{\text{ext}}.$$

بنابراین در این حد، شار خارجی را می‌توان با این روش وارد کرد که مجموع شارهای شاخه‌ای حول حلقه صفر باشد، اما یک شاخه‌ی اضافی در نظر گرفته شود که با القای متقابل به مداری دارای منبع جریان کوپل شده است. این کار در عمل رابطه‌ی (۲-۵۶) را به‌دست می‌دهد.

اگرچه در اینجا حالت یک CPB شنت‌شده با القاگر را به‌عنوان مثال در نظر گرفتیم، این روند را می‌توان برای شار عبوری از هر حلقه در یک مدار الکتریکی تکرار کرد؛ یعنی با در نظر گرفتن کوپلینگ القایی متقابل به یک منبع جریان در حد مناسب. بنابراین هنگام بررسی شارهای خارجی، همیشه می‌توان این روند حدی را در ذهن داشت.



شکل ۲-۱۶: مدار ساده‌ای که در آن شار خارجی $\Phi_{\text{ext}}(t)$ در حلقه وابسته به زمان است. دو درخت پوشای متفاوت با رنگ نارنجی، همراه با جهت‌گیری شاخه‌های متناظر، نشان داده شده‌اند.

۲-۶-۱ شارهای خارجی وابسته به زمان

اکنون به‌طور کوتاه بررسی می‌کنیم که چگونه می‌توان اثر شارهای خارجی وابسته به زمان را وارد کرد. اگر شار خارجی اعمال‌شده به حلقه، وابسته به زمان باشد، یک «نیروی محرکه‌ی الکتریکی» خارجی در اطراف حلقه ایجاد می‌کند. این موضوع به این معناست که قانون ولتاژ کیرشهف، یعنی رابطه‌ی (۲-۵۴)، به‌شکل زیر اصلاح می‌شود:

$$B\mathbf{v}_b = \mathbf{v}_{\text{ext}} = \dot{\mathbf{\Phi}}_{\text{ext}}. \tag{۲-۸۱}$$

این رابطه نشان می‌دهد که متغیر شاخه‌ی وتر $\dot{\Phi}_{b_\ell}$ باید بر حسب متغیرهای شاخه‌ای گره‌ای $\dot{\Phi}_{n_۱}$ و $\dot{\Phi}_{n_۲}$، و ولتاژ القاشده‌ی خارجی

$$v_{\text{ext}} = \dot{\Phi}_{\text{ext},\ell}$$

در حلقه‌ی ℓ بیان شود. این کار با گرفتن مشتق زمانی از رابطه‌ی (۲-۵۹) انجام می‌شود؛ یعنی:

$$\dot{\Phi}_{b_\ell} = \dot{\Phi}_{n_۲} - \dot{\Phi}_{n_۱} + \dot{\Phi}_{\text{ext},\ell}. \tag{۲-۸۲}$$

توجه کنید که $\dot{\Phi}_{\text{ext},\ell}$ فقط زمانی در لاگرانژی ظاهر می‌شود که شاخه‌ی وتر b_ℓ خازنی باشد، زیرا فقط در این حالت است که انرژی آن شاخه به متغیر $\dot{\Phi}_{b_\ell}$ وابسته است.

از آنجا که پاسخ به این پرسش که کدام شاخه وتر است و کدام شاخه نیست، به انتخاب درخت پوشا بستگی دارد، در نگاه اول ممکن است مبهم به نظر برسد که آیا $\Phi_{\text{ext}}(t)$ یا مشتق زمانی آن وارد لاگرانژی و در نهایت هامیلتونی می‌شود یا نه. برای نمونه، مدار شکل ۲-۱۶ را در نظر بگیرید که در آن دو درخت پوشای متفاوت رسم شده است. در مدار شکل ۲-۱۶، شاخه‌ی وتر خازنی است و داریم:

$$\Phi_{b=C} + \Phi_{b=J} = \Phi_{\text{ext}},$$

و مطابق روند اطراف رابطه‌ی (۲-۵۸):

$$\Phi_{b=C} = \Phi.$$

پس لاگرانژی برابر است با:

$$\mathcal{L} = \frac{C}{۲}\dot{\Phi}^۲ + E_J \cos\left(\frac{۲\pi}{\Phi_۰}(\Phi - \Phi_{\text{ext}})\right). \tag{۲-۸۳}$$

از سوی دیگر، در مدار شکل ۲-۱۶، شاخه‌ی وتر یک پیوند جوزفسون است. از آنجا که اکنون شاخه‌ی $b = J$ روی درخت پوشا قرار دارد، داریم:

$$\Phi_{b=J} = \Phi,$$

و

$$\Phi_{b=C} = \Phi_{\text{ext}} + \Phi_{b=J} = \Phi_{\text{ext}} + \Phi.$$

در نتیجه:

$$\mathcal{L} = \frac{C}{۲}(\dot{\Phi} + \dot{\Phi}_{\text{ext}})^۲ + E_J \cos\left(\frac{۲\pi}{\Phi_۰}\Phi\right). \tag{۲-۸۴}$$

تفاوت میان روابط (۲-۸۳) و (۲-۸۴) ممکن است حتی زمانی که $\dot{\Phi}_{\text{ext}} = ۰$ است چشمگیرتر به نظر برسد؛ زیرا در این حالت رابطه‌ی (۲-۸۳) به شار خارجی وابسته است، اما این وابستگی در رابطه‌ی (۲-۸۴) وجود ندارد. با این حال، می‌توان یک تغییر متغیر ساده

$$\Phi \mapsto \Phi + \Phi_{\text{ext}}$$

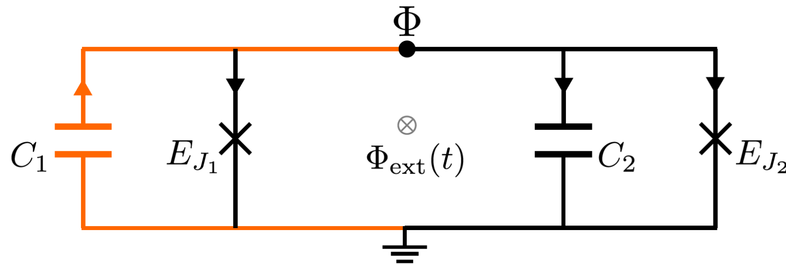
را روی رابطه‌ی (۲-۸۳) اعمال کرد و رابطه‌ی (۲-۸۴) را به‌دست آورد. البته این ارتباط ساده میان دو لاگرانژی حتی وقتی $\dot{\Phi}_{\text{ext}} \neq ۰$ نیز برقرار است؛ بنابراین همه‌چیز سازگار به نظر می‌رسد.

اکنون اجازه دهید به مداری پیچیده‌تر نگاه کنیم؛ یعنی یک حلقه‌ی SQUID، شکل ۲-۱۷ همان‌طور که در مرجع [۲۳] انجام شده است. این مدار می‌تواند، برای مثال، یک کیوبیت ترنسمون قابل‌تنظیم را نشان دهد که در بخش ۴-۱بررسی شده است. در این حالت، روابط زیر را داریم:

$$\Phi_{b=C_1} = \Phi, \qquad \Phi_{b=C_1} + \Phi_{b=C_2} = \Phi_{\text{ext}}, \qquad \Phi_{b=C_1} = -\Phi_{b=J_1}, \qquad \Phi_{b=C_2} = \Phi_{b=J_2}.$$

در نتیجه لاگرانژی برابر است با:

$$\mathcal{L} = \frac{C_1}{2}\dot{\Phi}^2 + \frac{C_2}{2}(\dot{\Phi} - \dot{\Phi}_{\text{ext}})^2 + E_{J1}\cos\left(\frac{2\pi}{\Phi_0}\Phi\right) + E_{J2}\cos\left(\frac{2\pi}{\Phi_0}(\Phi - \Phi_{\text{ext}})\right). \tag{۲-۸۵}$$



شکل ۲-۱۷: مدار SQUID که در آن شار خارجی $\Phi_{\text{ext}}(t)$ در حلقه‌ی مرکزی وابسته به زمان است. درخت پوشا با رنگ نارنجی، همراه با جهت‌گیری شاخه‌های متناظر، نشان داده شده است.

بار مزدوج برابر است با:

$$Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} = (C_1 + C_2)\dot{\Phi} - C_2\dot{\Phi}_{\text{ext}}(t), \tag{۲-۸۶}$$

که در آن وابستگی زمانی صریح از طریق شار خارجی را مشاهده می‌کنیم. پس هامیلتونی برابر است با:

$$\mathcal{H} = \frac{(Q + C_2\dot{\Phi}_{\text{ext}})^2}{2(C_1 + C_2)} - E_{J1}\cos\left(\frac{2\pi}{\Phi_0}\Phi\right) - E_{J2}\cos\left(\frac{2\pi}{\Phi_0}(\Phi - \Phi_{\text{ext}})\right). \tag{۲-۸۷}$$

وابستگی هامیلتونی به $\dot{\Phi}_{\text{ext}}$، یعنی در بخش خازنی، ممکن است برای اهداف محاسباتی مطلوب نباشد. بنابراین می‌توان پرسید آیا همیشه تبدیلی از متغیرها در لاگرانژی وجود دارد که تضمین کند $\dot{\Phi}_{\text{ext}}$ فقط وارد جمله‌ی پتانسیل شود یا نه.

تبدیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\Phi \mapsto \Phi + \alpha\Phi_{\text{ext}},$$

که در آن α یک پارامتر «پیمانه‌ای» gauge است که باید تعیین شود. لاگرانژی رابطه‌ی (۲-۸۵) به‌شکل زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = {} & \frac{C_1 + C_2}{2}\dot{\Phi}^2 + \big(C_1\alpha + (1-\alpha)C_2\big)\dot{\Phi}\dot{\Phi}_{\text{ext}} \\ & + E_{J1}\cos\left(\frac{2\pi}{\Phi_0}(\Phi + \alpha\Phi_{\text{ext}})\right) + E_{J2}\cos\left(\frac{2\pi}{\Phi_0}(\Phi - (1-\alpha)\Phi_{\text{ext}})\right), \end{aligned} \tag{۲-۸۸}$$

که در خط آخر، جمله‌هایی را که شامل $\dot{\Phi}$ یا Φ نیستند حذف کرده‌ایم. برای حذف $\dot{\Phi}_{\text{ext}}$، می‌توانیم قرار دهیم:

$$C_1\alpha + (1-\alpha)C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{C_2}{C_2 - C_1}.$$

این انتخاب در مرجع [۲۳] «پیمانه‌ی بی‌چرخش» irrotational gauge نامیده شده است. مستقیماً نتیجه می‌شود که هامیلتونی برابر است با:

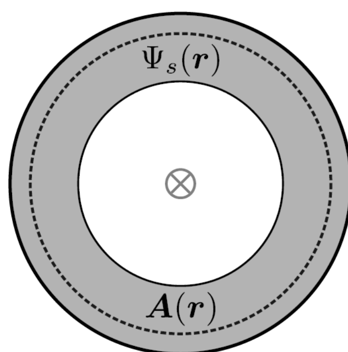
$$\mathcal{H} = \frac{Q^{۲}}{۲(C_{۱}+C_{۲})} - E_{J۱}\cos\left[\frac{۲\pi}{\Phi_{۰}}\left(\Phi - \frac{C_{۲}}{C_{۱}-C_{۲}}\Phi_{\rm ext}\right)\right] - E_{J۲}\cos\left[\frac{۲\pi}{\Phi_{۰}}\left(\Phi - \frac{C_{۱}}{C_{۱}-C_{۲}}\Phi_{\rm ext}\right)\right]. \quad (۲\text{-}۸۹)$$

اگرچه در اصل می‌توان دینامیک سیستم را با استفاده از رابطه‌ی (۲-۸۷) یا رابطه‌ی (۲-۸۹)، بسته به چارچوب مرجع انتخاب‌شده، حل کرد، اما رابطه‌ی (۲-۸۹) این کار را آسان‌تر می‌کند. علاوه بر این، مرجع [۲۳] بیان می‌کند که در سطحی بنیادی‌تر، فقط رابطه‌ی (۲-۸۹) به پیش‌بینی‌های سازگار برای زمان واپاشی کیوبیت $T_{۱}$ ناشی از نویز شار، با استفاده از قاعده‌ی طلایی فرمی، منجر می‌شود. طبق قاعده‌ی طلایی فرمی، با مقایسه با رابطه‌ی ۱۵.۷، تقریباً داریم:

$$T_{۱}^{-۱} \propto \left|\langle ۰|\partial_{\Phi_{\rm ext}}H|۱\rangle\right|^{۲},$$

که در آن ۰ و ۱ به‌ترتیب حالت پایه و نخستین حالت برانگیخته‌ی کیوبیت هستند. بر اساس این فرمول، در حالت پیوندهای نامساوی، نحوه‌ی تقسیم شار خارجی میان دو پیوند به پیش‌بینی‌های متفاوتی منجر می‌شود. اگرچه یک راه این است که این فرمول را تطبیق دهیم، رویکرد مرجع [۲۳] این است که خودِ روند کوانتیزه‌سازی مدار را اصلاح کنیم. به‌طور خاص، نویسندگان تغییر متغیرهای بالا را به یک روند نظام‌مند برای تقسیم شار میان چندین پیوند جوزفسون در احتمالاً چندین حلقه تعمیم می‌دهند. این کار در عمل روند استاندارد روابط (۲-۵۹) و (۲-۸۲) را جایگزین می‌کند؛ روندی که در آن شار خارجی وابسته به زمان فقط به شاخه‌ی وتر نسبت داده می‌شود که حلقه‌ی بنیادی عبورکننده‌ی شار را می‌بندد. تحلیل نظری مرجع [۲۳] اخیراً به‌صورت تجربی در مرجع [۲۴] تأیید شده است.

مرجع [۲۵] این نتایج را از حالت عناصر متمرکز به حالت ساختارهای پیوسته گسترش می‌دهد. در این حالت، آن‌ها پیمانه‌ی کولن Coulomb gauge را به‌عنوان پیمانه‌ی میدان الکترومغناطیسی شناسایی می‌کنند؛ پیمانه‌ای که وابستگی به شارهای مغناطیسی خارجی را در هامیلتونی به بخش پتانسیل محدود می‌کند، و نه به انرژی جنبشی از طریق $\dot{\Phi}_{\rm ext}$. علاوه بر این، نتایج مرجع [۲۳] از این نظر تأیید می‌شود که نشان داده می‌شود حد پیوسته‌ی روش آن‌ها، که بر پایه‌ی پیمانه‌ی بی‌چرخش است، دقیقاً به پیمانه‌ی کولن منجر می‌شود. ملاحظات بیشتر درباره‌ی برخورد با شارهای خارجی وابسته به زمان در کوانتیزه‌سازی مدار را می‌توان در مراجع [۲۳–۲۵] یافت.



شکل ۲-۱۸: حلقه‌ی ابررسانا، با رنگ خاکستری، که توسط یک میدان مغناطیسی قطع شده است. خط‌چین یک مسیر انتگرال‌گیری ممکن را در حجم ابررسانا برای انتگرال‌های رابطه‌ی (۲-۹۲) نشان می‌دهد.

۲-۶-۲ شارهای خارجی در ابررساناها و کوانتیزه‌شدن fluxoid

نظریه‌ی مداری‌ای که تاکنون توسعه داده‌ایم، برای هر مدار الکتریکی بدون اتلاف قابل استفاده است. تنها جایی که ابررسانایی وارد بحث شده، معرفی پیوند جوزفسون بوده است؛ عنصری که در فلزهای معمولی وجود ندارد. با این حال، می‌دانیم که ابررساناها با فلزهای معمولی تفاوت دارند و مقاومت آن‌ها صفر است. بنابراین این پرسش مطرح می‌شود که چه ویژگی‌های دیگری از ابررساناها می‌تواند در یک توصیف عنصر متمرکز نقش داشته باشد. دو اثر

برجسته‌ی ابررسانایی باید در نظر گرفته شوند: اثر مایسنر Meissner effect و کوانتیزه‌شدن فلوکسوئید fluxoid quantization. اثر مایسنر شامل بیرون رانده شدن میدان مغناطیسی از درون ابررسانا هنگام گذار به فاز ابررسانایی است [۸، ۲۶]. بنابراین، در یک ابررسانا نه‌تنها میدان الکتریکی، همانند فلزهای معمولی، صفر است، بلکه میدان مغناطیسی نیز صفر می‌شود.

در عوض، کوانتیزه‌شدن فلوکسوئید نقشی غیرساده و مهم ایفا می‌کند. برای یک ابررسانا، پارامتر نظم ابررسانایی را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\Psi_s(\mathbf{r}) = |\Psi_s(\mathbf{r})| e^{i\varphi(\mathbf{r})}. \tag{۲-۹۰}$$

در این صورت، چگالی جریان ابررسانایی $\mathbf{J}_s(\mathbf{r})$ برابر است با:

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{r}) = -\frac{e}{m_e}|\Psi_s(\mathbf{r})|^۲ \left(\hbar\nabla\varphi(\mathbf{r}) + ۲e\mathbf{A}(\mathbf{r})\right), \tag{۲-۹۱}$$

که در آن $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ پتانسیل برداری است [۸، ۲۶، ۲۷]. رابطه‌ی (۲-۹۱) نقطه‌ی شروع بنیادی برای استخراج اثر جوزفسون است. در نبود میدان مغناطیسی، فاز φ در رابطه‌ی اول جوزفسون، یعنی رابطه‌ی (۲-۳۵)، با اختلاف فازهای $\varphi_۱$ و $\varphi_۲$ پارامتر نظم ابررسانایِ دو ابررسانایی که پیوند را تشکیل می‌دهند، منطبق است؛ برای یک استخراج ساده به پیوست A در مرجع [۷] مراجعه کنید. با فرض اینکه

$$|\Psi_s(\mathbf{r})| \neq ۰$$

برای همه‌ی نقاط $\mathbf{r}$ در ابررسانا برقرار باشد، و با انتگرال‌گیری روی یک حلقه‌ی بسته، به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\frac{m_e}{۲e^۲}\oint d\mathbf{r}\cdot\frac{\mathbf{J}_s(\mathbf{r})}{|\Psi_s(\mathbf{r})|^۲} + \oint d\mathbf{r}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{m_e}{۲e^۲}\oint d\mathbf{r}\cdot\frac{\mathbf{J}_s(\mathbf{r})}{|\Psi_s(\mathbf{r})|^۲} + \Phi_{\text{loop}} = m\Phi_۰, \qquad m\in\mathbb{Z}, \tag{۲-۹۲}$$

که در آن شار مغناطیسی محصورشده توسط حلقه را به‌صورت زیر شناسایی کرده‌ایم:

$$\Phi_{\text{loop}} = \oint d\mathbf{r}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r}).$$

جمله‌ی سمت چپ رابطه‌ی (۲-۹۲) فلوکسوئید fluxoid نامیده می‌شود و خود شرط رابطه‌ی (۲-۹۲) نیز کوانتیزه‌شدن فلوکسوئید نام دارد.

اکنون رابطه‌ی (۲-۹۲) را تحلیل می‌کنیم. می‌بینیم که فلوکسوئید از مجموع یک شار مغناطیسی Φ_{loop} و یک جمله‌ی «جنبشی» تشکیل شده است. این جمله‌ی جنبشی از انتگرال خطی چگالی جریان ابررسانایی، تقسیم بر مربع اندازه‌ی پارامتر نظم، ناشی می‌شود. این جمله تاکنون وارد بحث ما درباره‌ی لاگرانژی‌ها و هامیلتونی‌ها در مدارهای الکتریکی نشده بود. با این حال، همان‌طور که در مرجع [۸] استدلال شده است، چگالی جریان ابررسانایی $\mathbf{J}_s(\mathbf{r})$ فقط در نزدیکی سطح ابررسانا ناصفر است؛ دقیق‌تر بگوییم، در عمق نفوذ لندن London penetration depth ماده. بنابراین، اگر مدار ما از ابررساناهایی ساخته شده باشد که ضخامت آن‌ها از عمق نفوذ لندن بیشتر است، همیشه می‌توانیم انتگرال خطی را در ناحیه‌ای داخلی بگیریم که در آن:

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{r}) \approx ۰.$$

برای جزئیات بیشتر به مرجع [۸] مراجعه کنید. اگر جمله‌ی جنبشی را صرف‌نظر کنیم، به شرط زیر می‌رسیم:

$$\Phi_{\text{loop}} = m\Phi_۰, \qquad m\in\mathbb{Z}, \tag{۲-۹۳}$$

که، همان‌طور که انتظار می‌رود، با نام کوانتیزه‌شدن شار شناخته می‌شود.

هنوز یک پرسش مهم باقی مانده است: تفسیر عدد صحیح m، یعنی تعداد فلوکسوئیدها، در روابط (۲-۹۲) و (۲-۹۳) چیست؟ با توجه به استخراج بالا، بلافاصله نتیجه می‌گیریم که m تعداد علامت‌دار دفعاتی را نشان می‌دهد

که فاز $\varphi(\mathbf{r})$ پارامتر نظم ابررسانایی در حلقه، به‌اندازه‌ی ۲π دور می‌زند. توجه کنید که فقط عدد فلوکسوئید اهمیت دارد، نه توزیع دقیق فاز $\varphi(\mathbf{r})$ در طول مسیر. علاوه بر این، رابطه‌ی (۲-۹۳) به نظر می‌رسد نشان دهد که شرط کلی رابطه‌ی (۲-۵۶) برای ابررساناها باید به‌صورت زیر اصلاح شود:

$$B\mathbf{\Phi}_b = \mathbf{\Phi}_{\text{ext}} + \mathbf{m}\Phi_{\circ}, \tag{۲-۹۴}$$

که در آن

$$\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^{M-N},$$

و $N+۱$ تعداد گره‌ها و M تعداد شاخه‌ها در گراف مدار است. با نگاه به رابطه‌ی (۲-۹۴)، اگر $\mathbf{m}$ ثابت باشد و در زمان تغییر نکند، می‌توان آن را به‌سادگی به‌عنوان همان رابطه‌ی (۲-۵۶) با یک بردار مؤثر جدید از شارهای خارجی تفسیر کرد:

$$\mathbf{\Phi}'_{\text{ext}} = \mathbf{\Phi}_{\text{ext}} + \mathbf{m}\Phi_{\circ}.$$

بنابراین اگر $\mathbf{m}$ ثابت باشد، توصیف پیشین ما همچنان معتبر است، فقط با پارامترهای شار که ممکن است جابه‌جا شده باشند. همچنین اگر فقط پیوندهای جوزفسون داشته باشیم، یا به‌طور کلی پتانسیل‌های ۲π-دوره‌ای داشته باشیم، جمله‌ی $\mathbf{m}\Phi_{\circ}$ حتی وارد لاگرانژی و هامیلتونی نیز نمی‌شود.

اما آیا ممکن است m در یک ابررسانا با زمان تغییر کند؟ و اگر چنین است، آیا باید آن را به‌عنوان یک درجه‌ی آزادی دینامیکی اضافی در نظر بگیریم که باید به‌نوعی کوانتیزه شود و در فضای هیلبرت حالت‌های متعامد $|m\rangle$ به آن نسبت داده شود؟ پاسخ به هر دو پرسش این است: از نظر نظری بله، اما در بیشتر موارد عملی خیر. تغییر در تعداد فلوکسوئیدها m در یک حلقه‌ی ابررسانا با نام لغزش فاز phase slip شناخته می‌شود. برای اینکه این فرایند رخ دهد، معمولاً به نانوسیم‌های ابررسانای بسیار نازک نیاز است [۲۸–۳۰]. در دمایی نزدیک به دمای بحرانی، لغزش‌های فاز به‌صورت حرارتی فعال می‌شوند [۳۱]، اما در دماهای پایین‌تر، تونل‌زنی همدوس میان حالت‌های فلوکسوئیدی مجاور

$$|m\rangle \leftrightarrow |m \pm ۱\rangle$$

باید در نانوسیم‌ها ممکن باشد. اگرچه مشاهده‌ی تجربی این پدیده دشوار است، اما این موضوع به این ایده منجر شده است که تونل‌زنی همدوس لغزش فاز، در نانوسیم‌های ابررسانا، اثر دوگان اثر جوزفسون است [۲۸]. از آنجا که در این کتاب با نانوسیم‌ها و نحوه‌ی توصیف آن‌ها سروکار نخواهیم داشت، می‌توانیم فرض کنیم که درجه‌ی آزادی فلوکسوئید روی مقدار مشخصی ثابت شده است. به‌طور خاص، می‌توانیم فرض کنیم:

$$m = ۰.$$

زیرا اگر پیش از سرد کردن ابررسانا هیچ شار مغناطیسی اعمال نکنیم، حالت $m = ۰$ حالتی است که انرژی را در یک حلقه‌ی ابررسانا کمینه می‌کند. با این حال، برای مطالعه‌ی تجربی تشکیل خودبه‌خودی فلوکسوئید، به مرجع [۳۲] مراجعه کنید.

بحث قبلی نشان می‌دهد که مدل‌سازی یک قطعه ابررسانا به‌عنوان یک عنصر متمرکز نسبتاً ظریف است و در نهایت ممکن است دشواری‌های نظری در توصیف از همین موضوع ناشی شوند. برای نمونه‌ای از یک مدل پیوسته‌ی ممکن برای یک سیم ابررسانای نازک، خواننده را به مرجع [۳۳] ارجاع می‌دهیم. یک رویکرد دیگر و نسبتاً گسترده این است که ابررسانا را به‌صورت زنجیره‌ای از پیوندهای جوزفسون مدل کنیم [۳۴]. در این حالت، لغزش‌های فاز با تغییراتی تقریباً برابر با ۲π در یکی از پیوندهای آرایه متناظر می‌شوند، و تونل‌زنی همدوس میان آن‌ها را می‌توان به‌طور دقیق از طریق یک رویکرد اختلالی شناسایی کرد. این تحلیل همچنین برای کیوبیت فلوکسونیوم مرتبط است که در بخش ۳-۳-۴ به‌طور کوتاه معرفی خواهیم کرد. برای بحث دقیق‌تر، خواننده را به مراجع اصلی فلوکسونیوم ارجاع می‌دهیم [۳۵، ۳۶]. در پایان یادآوری می‌کنیم که در ادبیات علمی هنوز درباره‌ی توصیف مؤثر و صحیح ابررساناها در حضور لغزش‌های فاز، بحث‌هایی وجود دارد؛ برای نمونه به مراجع [۳۷، ۳۸] مراجعه کنید.

فصل ۳

اعمال کوانتیزه‌سازی کانونی

در فصل ۲، یک روند کلی برای به‌دست آوردن هامیلتونی یک مدار الکتریکی بیان کردیم، و در این فصل نشان خواهیم داد که چگونه می‌توان از این روند برای تحلیل کیوبیت‌های مختلف استفاده کرد.

ایده‌ی اصلی این است که لاگرانژی را بر حسب سهم‌های انرژی، با استفاده از متغیرهای شاخه‌ای، بیان کنیم. سپس، با داشتن مدار الکتریکی و گراف متناظر با آن، متغیرهای مستقل مدار را از طریق یافتن درخت پوشا شناسایی می‌کنیم و لاگرانژی را دوباره بر حسب این متغیرهای مستقلِ شار گره‌ای بازنویسی می‌کنیم. پس از آنکه لاگرانژی و مجموعه‌ای از متغیرهای شار مستقل Φ_i را در اختیار داشتیم، می‌توانیم معادلات حرکت کلاسیکی را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_k} = ۰. \qquad (۳\text{-}۱)$$

وقتی Φ_kها شارهای گره‌ای باشند، مشاهده می‌کنیم که می‌توان این معادلات حرکت کلاسیکی را به‌صورت بیان قانون جریان کیرشهف در رابطه‌ی (۲-۴۸)تفسیر کرد؛ یعنی مجموع جریان‌ها در هر گره صفر است. توجه کنید که بُعد کمیت $\partial\mathcal{L}/\partial\Phi_k$ همان بُعد آمپر است.

۳-۱ وارون‌پذیری ماتریس ظرفیت خازنی

در پیوست A دیدیم که وقتی ماتریس متقارن C در رابطه‌ی $(A،۸)$ مثبت‌معین باشد و در نتیجه وارون‌پذیر شود، می‌توان هامیلتونی را به‌درستی از لاگرانژی تعریف کرد. وقتی متغیرهای $\dot{x}_i$ همان متغیرهای $\dot{\Phi}_i$ باشند، ماتریس C ماتریس ظرفیت خازنی نامیده می‌شود. در اینجا بررسی می‌کنیم که تحت چه شرایطی ماتریس ظرفیت خازنی واقعاً وارون‌پذیر است. ماتریس ظرفیت خازنی با در نظر گرفتن همه‌ی شاخه‌های خازنی، با خازن‌های خطی، در گراف به‌دست می‌آید؛ به این منظور، انرژی جنبشی T لاگرانژی را می‌نویسیم و سپس به متغیرهای گره‌ای تغییر متغیر می‌دهیم.

فرض کنید G گرافی با $N+۱$ گره باشد که یکی از آن‌ها به‌عنوان گره زمین انتخاب شده است. شار هر شاخه‌ی خازنی را می‌توان به‌صورت

$$\Phi_b = \pm(\Phi_n - \Phi_{n'})$$

نوشت، که در آن $b=(nn')$ و علامت $\pm$ به جهت‌گیری شاخه بستگی دارد. بنابراین داریم:

$$\dot{\Phi}_b = \pm(\dot{\Phi}_n - \dot{\Phi}_{n'}),$$

و چون گره $n=۰$ به‌عنوان گره زمین انتخاب شده است:

$$\dot{\Phi}_{n=۰} = ۰.$$

پس داریم:

$$T = \frac{۱}{۲} \sum_{b\text{شاخه‌های خازنی}} C_b \dot{\Phi}_b^۲ = \frac{۱}{۲} \sum_{n,n'=۱}^{N} \dot{\Phi}_n C_{nn'} \dot{\Phi}_{n'}. \qquad (۲\text{-}۳)$$

این رابطه، ماتریس ظرفیت خازنی متقارن $N \times N$ را با درایه‌های $C_{nn'}$ تعریف می‌کند. توجه می‌کنیم که در رابطه‌ی (۳-۲)، علامت جهت‌گیری $\pm$ در نهایت اهمیتی ندارد. درایه‌های ماتریس ظرفیت خازنی به‌صورت زیر داده می‌شوند:

$$\forall n, m = ۱, \ldots, N : \qquad C_{nn} = \sum_{\substack{n'=۰ \\ n' \neq n}}^{N} C_{b=(nn')},$$

و برای $m \neq n$:

$$C_{nm} = C_{mn} = -C_{b=(mn)} < ۰.$$

بنابراین، درایه‌های قطری C_{nn} برابر با مجموع همه‌ی ظرفیت‌های خازنی شاخه‌هایی هستند که گره n در آن‌ها شرکت دارد، از جمله ظرفیت خازنی نسبت به گره زمین. درایه‌ی C_{nm} برابر با منفیِ ظرفیت خازنی شاخه‌ی (mn) است. یک نمونه از این ساختار، ماتریس ۲×۲ در رابطه‌ی (۲-۶۲) است.

اکنون گزاره‌ی ساده‌ی زیر را اثبات می‌کنیم.

گزاره ۳.۱.۱. ماتریس ظرفیت خازنی C وارون‌پذیر است اگر گراف G دارای یک درخت پوشا باشد که گره زمین را به بقیه‌ی گره‌ها متصل کند و فقط از شاخه‌های خازنی b تشکیل شده باشد، به‌طوری‌که هر شاخه دارای ظرفیت غیرصفر $C_b > ۰$ باشد.

اثبات. فرض کنید $G_{\text{cap}} \subseteq G$ زیرگراف خازنیِ G باشد که همان تعداد گره‌های G را دارد، به‌گونه‌ای که دو گره در G_{cap} به هم متصل‌اند اگر میان آن‌ها یک شاخه‌ی خازنی وجود داشته باشد. اگر G دارای یک درخت پوشا باشد که از شاخه‌های خازنی تشکیل شده است، آنگاه G_{cap} همبند است. البته G_{cap} می‌تواند شاخه‌های بیشتری نسبت به شاخه‌های موجود در آن درخت پوشا داشته باشد.

ماتریس ظرفیت خازنی C تقریباً همان ماتریس لاپلاس وزن‌دار به‌صورت

$$L = D - A$$

است؛ که در آن A یک ماتریس متقارنِ مجاورت با وزن‌هایی است که $A_{ii} = ۰$ دارد، و D مجموع وزن‌های هر سطر از A است. در اینجا A همان ماتریس مجاورت زیرگراف خازنی

$$G_{\text{cap}} \subseteq G$$

است. واژه‌ی «تقریباً» از اینجا می‌آید که ماتریس ظرفیت خازنی C یک ماتریس $N \times N$ است، در حالی که ماتریس لاپلاس وزن‌دار L یک ماتریس $(N+۱) \times (N+۱)$ است. در واقع، C از L با حذف سطر و ستون متناظر با گره زمین $\Phi_{n=}$. به‌دست می‌آید.

یک ماتریس لاپلاس وزن‌دار L نیمه‌مثبت‌معین است و، وقتی گراف زیربنایی در اینجا یعنی G_{cap}، همبند باشد و شامل هر گره در گراف زیربنایی G شود، تنها یک بردار ویژه‌ی یکتا با مقدار ویژه‌ی صفر دارد؛ یعنی بردار

$$(۱, ۱, \ldots, ۱).$$

توجه می‌کنیم که تحت قید

$$V_۰ = \dot{\Phi}_۰ = ۰,$$

این بردار ویژه‌ی صفر یکتا همان بردار صفر است که در آن

$$\dot{\Phi}_n = V_n = ۰ \qquad \forall n,$$

یعنی همه‌ی ولتاژها با زمین برابرند. رفتن از L به C دقیقاً این بردار ویژه‌ی صفر را حذف می‌کند. بنابراین، وقتی G_{cap} یک گراف هم‌بند باشد و به گره زمین متصل باشد، ماتریس C فقط مقادیر ویژه‌ی مثبت دارد و در نتیجه وارون‌پذیر است. □

به‌عنوان نمونه‌ای که در آن شرط این گزاره برقرار نیست، فرض کنید G_{cap} دو مؤلفه‌ی هم‌بند داشته باشد: یکی متصل به زمین و دیگری به‌صورت «شناور آزاد» freely floating. در این حالت، ماتریس C به دو زیرماتریس جدا تقسیم می‌شود که یکی از آن‌ها دارای مقدار ویژه‌ی صفر است. بردار ویژه‌ی صفرِ زیرماتریس متناظر با زیرگراف شناور آزاد، متناظر با ولتاژی ثابت روی گره‌هاست. با زمین‌کردن این زیرگرافِ شناور آزاد، مقدار ویژه‌ی صفر حذف می‌شود و هر دو زیرماتریس وارون‌پذیر می‌شوند.

یافتن یک درخت پوشای خازنی میان متغیرهای مستقلِ شار گره‌ای الزامی نیست، همان‌طور که در برخی مثال‌های بخش ۳-۳ خواهیم دید. آنچه اهمیت دارد این است که مجموعه‌ی متغیرهای مستقل در مدار را شناسایی کنیم. ما آزاد هستیم که مناسب‌ترین مجموعه را انتخاب کنیم؛ مجموعه‌ای که به تفسیر روشن‌تری از ویژگی‌های مدار منجر شود. همچنین می‌توانیم درجات آزادی‌ای را که دینامیکی ندارند، به‌صورت دستی حذف کنیم. بنابراین، وقتی درخت پوشایی مانند آنچه در گزاره‌ی ۱,۱,۳ آمده وجود نداشته باشد، می‌دانیم که باید بتوانیم تعداد متغیرهای دینامیکی مستقل را کاهش دهیم.

۳-۲ ناهم‌مکانی برهم‌کنش‌های خازنی در هامیلتونی

پیش از آنکه چند مثال را بررسی کنیم، جالب است یک مشاهده‌ی دیگر درباره‌ی شکل هامیلتونی و ناهم‌موضعی بودن آن، که ناشی از کوپلینگ‌های خازنی در مدار الکتریکی است، مطرح کنیم. non-locality

اطلاعات مربوط به کوپلینگ‌های خازنی در یک مدار الکتریکی، در ماتریس ظرفیت خازنی C ذخیره می‌شود. در هامیلتونی‌ای که به‌دست می‌آوریم، یعنی:

$$\mathcal{L} = \frac{۱}{۲}\dot{\mathbf{\Phi}}^T C \dot{\mathbf{\Phi}} - U(\mathbf{\Phi}) \quad \to \quad \mathcal{H} = \frac{۱}{۲}\mathbf{Q}^T C^{-۱}\mathbf{Q} + U(\mathbf{\Phi}), \qquad (۳\text{-}۳)$$

کوپلینگ از طریق وارون ماتریس ظرفیت خازنی، یعنی $C^{-۱}$، وارد می‌شود. وقتی C به‌عنوان یک ماتریس، تنک sparse و «موضعی» باشد، یعنی تعداد طبیعی و کمی از کوپلینگ‌ها برای هر گره را نشان دهد، وارون آن $C^{-۱}$ الزاماً چنین نیست. بنابراین، کوپلینگ‌ها در هامیلتونی $\mathcal{H}$ فراتر از گره‌های نزدیک‌ترین همسایه‌ای می‌روند که به‌صورت خازنی به هم کوپل شده‌اند.

ناهم‌موضعی بودن $C^{-۱}$ معمولاً به‌صورت اختلالی بررسی می‌شود. این کار زمانی موجه است که برخی کوپلینگ‌ها بسیار بزرگ‌تر از بقیه باشند. کاهش سریع و کافی این برهم‌کنش‌های غیرِ نزدیک‌ترین همسایه برای طراحی، کنترل خطا، و کاهش تداخل متقابل cross-talk در مدارهای الکتریکی کوانتومی اهمیت دارد.

برای مثال، اگر کوپلینگ خازنی میان یک جفت گره قوی باشد، مثلاً برابر با C_{strong}، در حالی که کوپلینگ‌های خازنی به دیگر گره‌های باقی‌مانده ضعیف باشند، یعنی دارای اندازه‌ی

$$\epsilon = C_{\text{weak}},$$

آنگاه می‌توانیم از روش‌های اختلالی برای تقریب وارون ماتریس ظرفیت خازنی استفاده کنیم. می‌توانیم بنویسیم:

$$C = \begin{pmatrix} C_{\text{strong}} & ۰ \\ ۰ & C_{\text{rest}} \end{pmatrix} + E = C_۰ + E, \qquad (۴\text{-}۳)$$

که در آن، برای مثال:

$$C_{\text{strong}} = \begin{pmatrix} C_{\text{strong}} & -C_{\text{strong}} \\ -C_{\text{strong}} & C_{\text{strong}} \end{pmatrix},$$

و C_{rest} ماتریس ظرفیت خازنی میان گره‌های باقی‌مانده است که کوپلینگ‌های میان خود آن‌ها را نشان می‌دهد. ماتریس اختلالی E کوپلینگ‌های خازنی میان دو زیرمجموعه‌ی گره‌ها، یعنی جفت گره و بقیه‌ی گره‌ها، را نشان می‌دهد؛ و درایه‌های ماتریس E حداکثر از مرتبه‌ی $O(\epsilon)$ هستند. داریم:

$$
\begin{aligned}
C^{-1} &= \left(C_0\left(1 + C_0^{-1}E\right)\right)^{-1} \\
&= \left(1 + C_0^{-1}E\right)^{-1} C_0^{-1} \\
&\approx \left(1 - C_0^{-1}E\right) C_0^{-1} \\
&= C_0^{-1} - C_0^{-1}EC_0^{-1},
\end{aligned}
\tag{۳-۵}
$$

که از بسط تیلور وارون یک ماتریس به‌دست آمده است. وارون ماتریس بلوکی C_0، طبیعتاً خود یک ماتریس بلوکی با همان ساختار اتصال بلوکی است.

به‌طور کلی‌تر، اگر مدار را به زیرمجموعه‌های کوچک و قویاً کوپل‌شده‌ای از گره‌ها تقسیم کنیم، می‌توان ساختار کوپلینگ در C^{-1} را که به‌صورت اختلالی بسط داده شده است، به‌سادگی تعیین کرد. تصحیح مرتبه‌ی اول، که در رابطه‌ی (۳-۵) متناسب با E است، دارای ساختار اتصالی‌ای است که توسط کوپلینگ‌های خازنیِ ضعیفِ اختلالی تعیین می‌شود. تصحیح مرتبه‌ی بعدی، یعنی

$$O(\|E\|^2),$$

دارای ساختار اتصالی‌ای است که توسط E^2 تعیین می‌شود؛ یعنی کوپلینگ‌های ناصفر میان گره‌هایی در زیرمجموعه‌های متفاوت ظاهر می‌شوند که از طریق یک گره واسطه به‌طور ضعیف به هم کوپل شده‌اند، و به همین ترتیب ادامه می‌یابد.

۳-۳ مثال‌ها

در این بخش، مجموعه‌ای از مدارهای کوانتومی مختلف را بررسی می‌کنیم که روش کوانتیزه‌سازی circuit-QED را نشان می‌دهند و به تعریف کیوبیت‌های گوناگون منجر می‌شوند. کار را با حالتی آغاز می‌کنیم که در آن نمی‌توان در مدار الکتریکی، یک درخت پوشا شامل فقط شاخه‌های خازنی پیدا کرد؛ بنابراین نمی‌توان گزاره‌ی ۳٫۱٫۱ را اعمال کرد.

۳-۳-۱ یک حالت بیمارگونه؟

مدار الکتریکی شکل ۳-۱را با دو شار گره‌ای Φ_1 و Φ_2 در نظر بگیرید. این حالتِ ظاهراً مسئله‌دار در مرجع [۳۹] مطالعه شده است و یک به‌روزرسانی گسترده نیز در مرجع [۴۰] ارائه شده است. لاگرانژی به‌صورت زیر است:

$$
\mathcal{L} = \frac{C}{2}\dot{\Phi}_2^2 - \frac{1}{2L}(\Phi_2 - \Phi_1)^2 + E_J \cos\left(\frac{2\pi}{\Phi_0}\Phi_1\right).
\tag{۳-۶}
$$

توجه کنید که اگر یک ظرفیت خازنی کوچک C_J را به‌صورت موازی با پیوند جوزفسون قرار ندهیم، مدار دیگر دارای درخت پوشایی نیست که فقط از شاخه‌های خازنی تشکیل شده باشد. البته در اصل، هر پیوند جوزفسون دارای یک ظرفیت خازنی کوچک C_J نیز هست؛ بنابراین از نظر فیزیکی این ظرفیت وجود دارد، اما در اینجا حالتی را بررسی می‌کنیم که در آن این ظرفیت غایب فرض شده است.

ظرفیت اضافی C_J یک انرژی جنبشی به اندازه‌ی

$$\frac{C_J\dot{\Phi}_1^2}{2}$$

به لاگرانژی اضافه می‌کند. در حدی که C_J بسیار کوچک باشد، جمله‌ی متناظر در هامیلتونی، که متناسب با C_J^{-1} است، بسیار بزرگ می‌شود و مُد متناظر با آن انرژی بالایی خواهد داشت؛ یعنی جرمی بسیار کوچک دارد. اگر کسی

به کار با هامیلتونی‌های اختلال‌یافته عادت داشته باشد، ممکن است در نگاه اول غیرشهودی به نظر برسد که جمله‌ای که در مدار کوچک است و آن را حذف می‌کنیم، در هامیلتونی قدرت بزرگی داشته باشد.

برای مدار شکل ۳-۱، در حد $C_J \to 0$، معادله‌ی اویلر–لاگرانژ برای متغیر Φ_1 برابر است با:

$$C_J \ddot{\Phi}_1 + \frac{\partial U}{\partial \Phi_1} = 0 \quad \xrightarrow{C_J \to 0} \quad \frac{1}{L}(\Phi_2 - \Phi_1) = I_c \sin\left(\frac{2\pi}{\Phi_0}\Phi_1\right), \tag{۳-۷}$$

که نشان می‌دهد باید Φ_1 را به‌سادگی در کمینه‌ی پتانسیل آن قرار دهیم. معادله‌ی آخر بیان می‌کند که جریان عبوری از شاخه‌ی القایی باید برابر با جریان عبوری از شاخه‌ی پیوند جوزفسون باشد. رابطه‌ی (۳-۷) به‌صورت

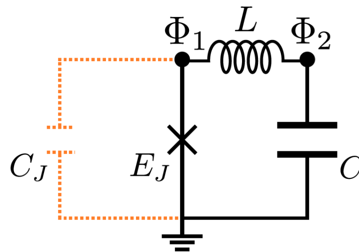
$$\Phi_2 = f(\Phi_1)$$

است. اگر بتوانیم آن را به‌صورت

$$\Phi_1 = f^{-1}(\Phi_2)$$

وارون کنیم، می‌توانیم Φ_1 را از رابطه‌ی (۳-۶) حذف کنیم و لاگرانژی‌ای فقط بر حسب Φ_2 داشته باشیم.

این رویکرد کلاسیکی آشکارا مشکلاتی دارد؛ زیرا تابع وارون f^{-1} ممکن است اصلاً وجود نداشته باشد، مثلاً چندمقداری باشد. اما فراتر از این، چنین حذف کلاسیکی ساده‌ای هنگام کوانتیزه کردن سیستم به‌وضوح قابل توجیه نیست. به‌صورت کلاسیکی، حالت پایه‌ی متغیر پرانرژی Φ_1 همان کمینه‌ی پتانسیل است؛ اما به‌صورت کوانتومی، حالت پایه دارای انرژی نقطه‌ی صفر خودش است. بنابراین مشخص می‌شود که هنگام برخورد کوانتوم‌مکانیکی با سیستم، راهبرد حذف کلاسیکیِ رابطه‌ی (۳-۷) هرگز معتبر نیست؛ به مرجع [۳۹] مراجعه کنید. ما در پیوست ؟؟، با استفاده از تقریب بورن–اوپنهایمر Born-Oppenheimer approximation، دوباره به این مدار مسئله‌دار بازمی‌گردیم و یک بررسی کامل و نظام‌مند از آن ارائه می‌دهیم. به‌طور کلی‌تر، یک روش ایمن این است که هر ظرفیت خازنی کوچک موجود در مدار را به‌طور صریح وارد کنیم؛ به‌گونه‌ای که یک درخت پوشای خازنی تشکیل شود. سپس باید بررسی کنیم که آیا نوسانات کوانتومیِ درجات آزادی سریع، که قرار است حذف شوند، بر دینامیک درجات آزادی باقی‌مانده اثر می‌گذارند یا نه.



شکل ۳-۱: درخت پوشا فقط شامل شاخه‌های خازنی نیست؛ بنابراین ماتریس ظرفیت خازنی وارون‌پذیر نیست و یک متغیر باید به‌صورت دستی حذف شود. اما چگونه؟

۳-۳-۲ دو کیوبیت شار کوپل‌شده

مدار شکل ۳-۲را در نظر بگیرید که دو کیوبیت شارِ کوپل‌شده به‌صورت القایی را در پیکربندی rf SQUID نشان می‌دهد [۴۱]. برای هر دو گراف مدار الکتریکی G_1 و G_2، یک درخت پوشا انتخاب می‌کنیم. در این حالت، این درخت‌ها همان شاخه‌های خازنی منفرد $b = C_1$ و $b = C_2$ هستند که در شکل ۳-۲ با رنگ نارنجی نشان داده شده‌اند. بنابراین انرژی جنبشی برابر است با:

$$T = \frac{1}{2} C_{J1} \dot{\Phi}_{C1}^2 + \frac{1}{2} C_{J2} \dot{\Phi}_{C2}^2. \tag{۳-۸}$$

اکنون همه‌ی شاخه‌هایی را در نظر بگیرید که در درخت پوشا قرار ندارند. هیچ شاری از حلقه‌ی بنیادی‌ای که توسط شاخه‌ی متناظر با پیوند جوزفسون ساخته می‌شود عبور نمی‌کند؛ بنابراین، برای این شاخه‌ها داریم:

$$\Phi_{J1} = -\Phi_{C1}, \qquad \Phi_{J2} = \Phi_{C2},$$

با توجه به جهت‌گیری‌های انتخاب‌شده. در نتیجه انرژی پتانسیل جوزفسونی برابر است با:

$$U_J = -E_{J1}\cos\left(\frac{2\pi\Phi_{J1}}{\Phi_0}\right) - E_{J2}\cos\left(\frac{2\pi\Phi_{J2}}{\Phi_0}\right).$$

انرژی ناشی از القاهای متقابل به همان فرمی است که در رابطه‌ی (۲-۴۵) آمده است؛ و از آنجا که شاخه‌ها با حلقه‌هایی متناظر هستند که مقداری شار خارجی از آن‌ها عبور می‌کند، باید متغیرهای شاخه‌ای Φ_{L1} و Φ_{L2} را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\Phi_{L1} = -\Phi_{C1} + \Phi_{\text{ext}}^{(1)}, \qquad \Phi_{L2} = \Phi_{C2} + \Phi_{\text{ext}}^{(2)}. \tag{۳-۹}$$

همه‌ی این مراحل برای چنین مثال ساده‌ای کمی سنگین به نظر می‌رسد؛ زیرا در هر مدار فقط یک متغیر شاخه‌ای مستقل وجود دارد. بنابراین می‌توانیم مستقیماً آن را با شارهای گره‌ای

$$\Phi_i' = \Phi_{Ci}, \qquad i = 1, 2,$$

جایگزین کنیم و لاگرانژی کل را به هامیلتونی تبدیل کنیم:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = &\sum_{i=1,2}\frac{Q_i^2}{2C_{Ji}} - \sum_{i=1,2}E_{Ji}\cos\left(\frac{2\pi}{\Phi_0}\Phi_i'\right)\\ &+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\Phi_1' + \Phi_{\text{ext}}^{(1)} & \Phi_2' + \Phi_{\text{ext}}^{(2)}\end{pmatrix} M^{-1}\begin{pmatrix}-\Phi_1' + \Phi_{\text{ext}}^{(1)}\\ \Phi_2' + \Phi_{\text{ext}}^{(2)}\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{۳-۱۰}$$

که با توجه به رابطه‌ی(۲-۴۵)، داریم:

$$M^{-1} = \frac{1}{L_1L_2 - M^2}\begin{pmatrix}L_2 & -M\\ -M & L_1\end{pmatrix}. \tag{۳-۱۱}$$

ابتدا القای متقابل M را نادیده می‌گیریم؛ یعنی $M = 0$ می‌گیریم، به‌طوری‌که دو مدارِ بدون کوپلینگ داشته باشیم. پس از تغییر متغیرهای

$$\Phi_1 = -\Phi_1' + \Phi_{\text{ext}}^{(1)}, \qquad \Phi_2 = \Phi_2' + \Phi_{\text{ext}}^{(2)},$$

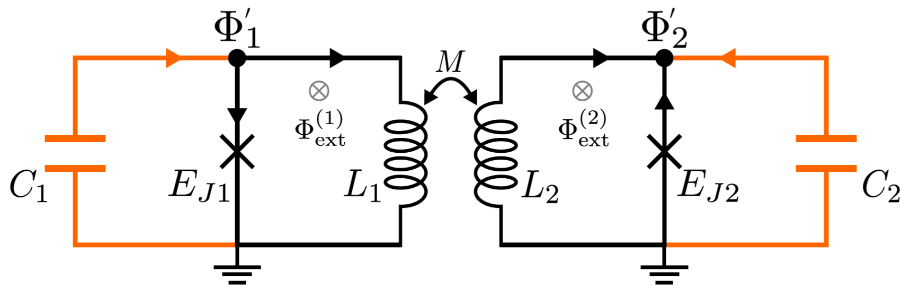
و قرار دادن هر دو شار خارجی برابر با نصف کوانتوم شار،

$$\Phi_{\text{ext}}^{(1)} = \Phi_{\text{ext}}^{(2)} = \frac{\Phi_0}{2},$$

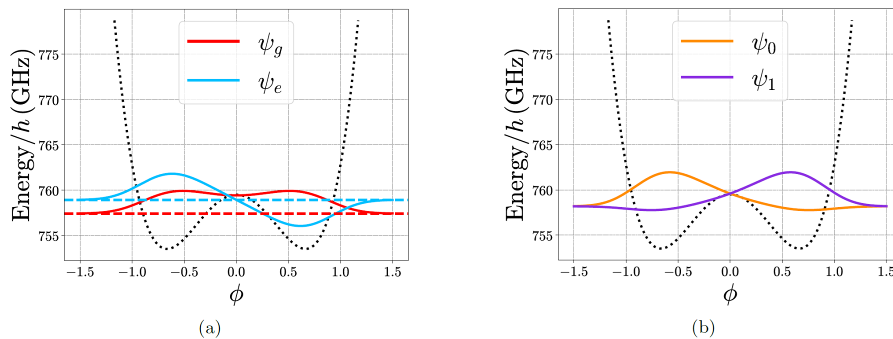
هامیلتونی هر کیوبیت شار منفرد به‌شکل زیر درمی‌آید:

$$\mathcal{H}_i = \frac{Q_i^2}{2C_i} + E_{Ji}\cos\left(\frac{2\pi}{\Phi_0}\Phi_i\right) + \frac{\Phi_i^2}{2L_i} = 4E_{Ci}q_i^2 + E_{Ji}\cos\phi_i + \frac{E_{Li}}{2}\phi_i^2, \qquad i = 1, 2, \tag{۳-۱۲}$$

که در آن متغیرهای بی‌بُعد، و همچنین انرژی‌های شارژ و القایی را همانند بخش ۲-۲-۱ معرفی کرده‌ایم. مزیت کار کردن در نقطه‌ی نصف کوانتوم شار این است که پتانسیل در اطراف این نقطه نسبت به نویز شار در مرتبه‌ی اول حساس نیست؛ زیرا مشتق اول تابع $\cos(\cdot)$ در این نقطه صفر می‌شود. همچنین به بخش ۳-۷ مراجعه کنید.



شکل ۳-۲: دو کیوبیت شار rf SQUID که به‌صورت القایی به یکدیگر کوپل شده‌اند؛ هر کدام نماینده‌ی یک درجه‌ی آزادی مستقل هستند. پیکان‌ها انتخاب ما برای جهت‌گیری شاخه‌ها را نشان می‌دهند.



شکل ۳-۳: کیوبیت شار با پتانسیل متقارن. الف) تابع موج حالت پایه و حالت نخستِ برانگیخته بر حسب ϕ برای هامیلتونی رابطه‌ی (۳-۱۲)، همراه با انرژی‌های آن‌ها، که با خطچین نشان داده شده‌اند. ب) حالت‌های پایه‌ی محاسباتی که به‌صورت ترکیب متقارن و پادمتقارن دو حالت ویژه‌ی اول به‌دست می‌آیند؛ یعنی $|۰\rangle = (|g\rangle + |e\rangle)/\sqrt{۲}$ و $|۱\rangle = (|g\rangle - |e\rangle)/\sqrt{۲}$. پارامترهای مربوطه برابرند با $E_C/h = ۰{,}۱۲۴$ GHz، $E_J/E_C = ۶۱۲۹$، و $E_J/E_L = ۱{,}۰۸$، که مقادیر معمول برای کیوبیت‌های شار rf SQUID هستند؛ برای نمونه، مرجع [۴۲] را ببینید. شکل از مرجع [۴۳] بازتولید شده است.

برای نسبت‌های بزرگ E_J/E_L، جمله‌ی کسینوسی در پتانسیل

$$U(\phi) = E_J \cos\phi + \frac{E_L}{۲}\phi^{۲}$$

چاه‌های دوگانه‌ای را به‌صورت متقارن در اطراف $\phi = ۰$ ایجاد می‌کند، و با کوچک‌تر شدن نسبت E_J/E_L، تعداد چاه‌های مؤثر کمتر می‌شود. کیوبیت شار در رژیمی کار می‌کند که فقط یک چاه دوگانه وجود دارد. با وجود یک سد تونلی متناهی، که ارتفاع نسبی آن توسط E_C/E_J تعیین می‌شود، دو حالت ویژه‌ی انرژیِ پایین‌تر، برهم‌نهی‌های متقارن و پادمتقارن از حالت‌هایی هستند که در هر چاه موضعی شده‌اند؛ همان‌طور که در شکل ۳-۳نشان داده شده است. با گرفتن ترکیب‌های خطی از این حالت‌های ویژه، می‌توان یک پایه‌ی محاسباتی از حالت‌های شار متناهی تعریف کرد؛ شکل ۳-۳ را ببینید. این حالت‌ها متناظر با جریانی هستند که به‌صورت ساعت‌گرد یا پادساعت‌گرد در حلقه‌ی SQUID جاری می‌شود. این حالت‌ها گاهی فلوکسون fluxon نامیده می‌شوند. وقتی ارتفاع نسبی سد تونلی افزایش یابد، یعنی $E_C/E_J \to ۰$، حالت‌های ویژه‌ی انرژی بیشتر به حالت‌های همتراز تبدیل می‌شوند؛ بنابراین حالت‌های فلوکسونی به حالت‌های ویژه‌ی همتراز تبدیل می‌شوند.

در حالتی که E_L به‌اندازه‌ی کافی کوچک باشد، برای این حد به بخش ۳-۳-۴درباره‌ی کیوبیت فلوکسونیوم نیز مراجعه کنید، و بیش از دو چاه در مسئله نقش داشته باشند، ممکن است درون یک چاه منفرد چندین حالت وجود داشته

باشد. این حالت‌ها اغلب پلاسمون plasmon نامیده می‌شوند. چنین پلاسمون‌هایی اگر چاه را به‌صورت یک پتانسیل درجه‌دو، یعنی هماهنگ، مدل کنیم، دارای یک «فرکانس ویژه‌ی پلاسما» مشخص هستند.

در مورد کیوبیت شار، می‌توان با اعمال شار مغناطیسی اضافی از طریق حلقه‌ای که توسط شاخه‌ی جوزفسون بسته شده است، پتانسیل چاه دوگانه را تغییر داد؛ برای مثال آن را نامتقارن کرد. می‌توانید خودتان بررسی کنید که این کار چگونه انرژی پتانسیل را تغییر می‌دهد؛ اما تأکید می‌کنیم که برای پارامترهای معمول کیوبیت شار، مانند مقادیری که در کپشن شکل ۳-۳گزارش شده‌اند، پتانسیل به نوسانات شار خارجی بسیار حساس است.

کوپلینگ القایی اکنون دو کیوبیت شارِ کوپل‌شده را در نظر بگیرید که در نقطه‌ی نصف کوانتوم شار کار می‌کنند و $M \neq ۰$ است. القای متقابل یک پتانسیل کوپلینگ اضافی ایجاد می‌کند که می‌توان آن را به‌صورت زیر محاسبه کرد:

$$U_{\text{coupl}}(\Phi_۱, \Phi_۲) = -\frac{M}{L_۱ L_۲ - M^۲} \Phi_۱ \Phi_۲. \qquad (۱۳\text{-}۳)$$

پس از کوانتیزه کردن سیستم، می‌توانیم پتانسیل کوپلینگ را روی پایه‌ی محاسباتی کیوبیت شار

$$|۰_i\rangle, \ |۱_i\rangle$$

تصویر کنیم؛ به‌طوری‌که عمل آن در این زیرفضا برابر شود با:

$$\Pi_{\text{comp}} U_{\text{coupl}} \Pi_{\text{comp}} = -\frac{M}{L_۱ L_۲ - M^۲} \langle ۰_۱|\hat{\Phi}_۱|۰_۱\rangle \langle ۰_۲|\hat{\Phi}_۲|۰_۲\rangle Z_۱ Z_۲. \qquad (۱۴\text{-}۳)$$

در اینجا Π_{comp} تصویرگر روی زیرفضای دوکیوبیتی است و از این واقعیت استفاده کرده‌ایم که:

$$\langle ۰_i|\hat{\Phi}_i|۱_i\rangle = ۰, \qquad \langle ۱_i|\hat{\Phi}_i|۱_i\rangle = -\langle ۰_i|\hat{\Phi}_i|۰_i\rangle.$$

این روابط از تقارن چاه دوگانه به‌دست می‌آیند؛ تمرین ۳-۴ در بخش ۳-۴ را ببینید. می‌بینیم که القای متقابل، یک کوپلینگ درهم‌تنیده‌کننده‌ی ZZ میان کیوبیت‌های شار ایجاد می‌کند. همچنین مشاهده می‌کنیم که شدت کوپلینگ ZZ به مقدار انتظاری عملگر شار نسبت به حالت $|۰\rangle$ بستگی دارد. برای مثال، حالت $|۰\rangle$ در کیوبیت ۱ با یک جریان «پایدار» مشخص می‌شود:

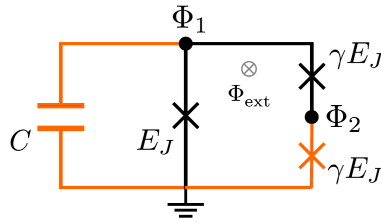
$$i_۱ = \frac{\langle ۰_۱|\hat{\Phi}_۱|۰_۱\rangle}{L_۱},$$

و این شدت جریان است که اندازه‌ی کوپلینگ را تعیین می‌کند. این نتیجه از یک دیدگاه کاملاً کلاسیکی نسبت به کوپلینگ نیز به‌دست می‌آید: حالت‌های $|۰\rangle$ و $|۱\rangle$ متناظر با جریان‌های مخالف هستند و این جریان‌ها در حلقه‌ی کیوبیت شار دیگر میدان‌های مغناطیسی مخالف تولید می‌کنند؛ همین امر منشأ کوپلینگ مغناطیسی است.

برای نسبت‌های بزرگ E_J/E_L، کمینه‌های چاه دوگانه تقریباً در $\Phi_۰/۲$ قرار دارند. در این حالت می‌توان نوشت:

$$\Pi_{\text{comp}} U_{\text{coupl}} \Pi_{\text{comp}} \approx -\frac{M \Phi_۰^۲}{۴(L_۱ L_۲ - M^۲)} Z_۱ Z_۲. \qquad (۱۵\text{-}۳)$$

در اینجا ساده‌ترین نوع کیوبیت شار را بررسی کردیم، در حالی که انواع دیگری از کیوبیت‌های شار نیز وجود دارند که از نظر تعداد پیوندها و رژیم پارامترها با یکدیگر تفاوت دارند. به‌طور خاص، کیوبیت‌های شار در ابتدا نه با استفاده از یک شاخه‌ی القایی، بلکه با جایگزین کردن این شاخه با دو پیوند جوزفسون کوچک ساخته شدند. این کیوبیت در بخش بعدی بررسی خواهد شد و معمولاً بسته به رژیم پارامترها، با نام کیوبیت شارِ جریان پایدار persistent-current flux qubit یا کیوبیت شارِ شنت‌شده‌ی خازنی [۴۴] شناخته می‌شود. در بخش ۳-۴ درباره‌ی برخی تقارن‌های پایه‌ای این کیوبیت‌های شار بحث خواهیم کرد. برای آشنایی بیشتر با کیوبیت‌های شار، به مرجع [۴۵] و مراجع [۴۴، ۴۶–۴۸] و همچنین منابع معرفی‌شده در آن مقالات مراجعه کنید.



شکل ۳-۴: یک کیوبیت شار با سه پیوند جوزفسون.

۳-۳-۳ کیوبیت شار: جایگزینی القاگر با دو پیوند جوزفسون

کیوبیت‌های شار با استفاده از مدار نشان‌داده‌شده در شکل ۳-۴ پیاده‌سازی شده‌اند. در اینجا دو پیوند جوزفسونِ سری، که هر کدام انرژی جوزفسون γE_J دارند، نقش شاخه‌ی «القایی» را ایفا می‌کنند. اگر یک ظرفیت خازنی کوچک را به‌صورت موازی با پیوندهای جوزفسون در نظر نگیریم، می‌بینیم که مدار دارای درخت پوشای خازنی نیست. بر حسب متغیر های گره‌ای $\Phi_۱$ و $\Phi_۲$، داریم:

$$\mathcal{L} = \frac{C}{۲}\dot{\Phi}_۱^۲ + E_J \cos\left(\frac{۲\pi}{\Phi_۰}\Phi_۱\right) + \gamma E_J \cos\left(\frac{۲\pi}{\Phi_۰}\Phi_۲\right) + \gamma E_J \cos\left(\frac{۲\pi}{\Phi_۰}(\Phi_۲ - \Phi_۱ + \Phi_{\rm ext})\right). \tag{۳-۱۶}$$

به‌عنوان نخستین رویکرد، تلاش می‌کنیم قیدی پیدا کنیم که متغیر $\Phi_۲$ را از لاگرانژی $\mathcal{L}$ حذف کند و هامیلتونی‌ای فقط برای متغیر باقی‌مانده، یعنی $\Phi_۱$، به‌دست آوریم. با معرفی متغیرهای بی‌بُعد ϕ_i، معادله‌ی اویلر–لاگرانژ برای متغیر $\phi_۲$ به‌صورت زیر است:

$$\frac{\partial U}{\partial \phi_۲} = ۰ \quad \Rightarrow \quad \sin\phi_۲ + \sin(\phi_۲ - \phi_۱ + \phi_{\rm ext}) = ۰. \tag{۳-۱۷}$$

توجه کنید که مشتق دوم برابر است با:

$$\frac{\partial^۲ U}{\partial \phi_۲^۲} \propto \cos\phi_۲ + \cos(\phi_۲ - \phi_۱ + \phi_{\rm ext}).$$

برای رابطه‌ی (۳-۱۷) دو جواب وجود دارد که با $k = ۰, ۱$ برچسب‌گذاری می‌شوند:

$$\phi_۲^{k=۰,۱} = \frac{۱}{۲}(\phi_۱ - \phi_{\rm ext}) + k\pi.$$

هر کدام از این جواب‌ها در ناحیه‌ای متفاوت از $\phi_۱$ پایدار هستند؛ یعنی:

$$\left.\frac{\partial^۲ U}{\partial \phi_۲^۲}\right|_{\phi_۲^k} > ۰.$$

به‌طور مشخص، جواب $k = ۰$ زمانی پایدار است که:

$$|\phi_۱ - \phi_{\rm ext}| \leq \pi,$$

و جواب $k = ۱$ زمانی پایدار است که:

$$|\phi_۱ - \phi_{\rm ext} + ۲\pi| \leq \pi.$$

با قرار دادن
$$\phi_۲ = \phi_۲^{k=۰}$$
پتانسیل زیر به‌دست می‌آید:
$$U = -E_J \cos\phi_۱ - ۲\gamma E_J \cos\left(\frac{\phi_۱ - \phi_{\text{ext}}}{۲}\right).$$
اکنون اگر تعریف کنیم:
$$۲\phi = \phi_۱ - \phi_{\text{ext}},$$
هامیلتونی یک‌بعدی زیر حاصل می‌شود:
$$\mathcal{H} = E_C q^۲ - E_J \cos(۲\phi + \phi_{\text{ext}}) - ۲\gamma E_J \cos(\phi). \qquad (۳\text{-}۱۸)$$
توجه کنید که در مقایسه با جمله‌ی استاندارد انرژی شارژ در رابطه‌ی (۲-۲۰)، در اینجا یک اختلاف ضریب ۴ وجود دارد. تا زمانی که
$$E_C \ll \gamma E_J$$
باشد، که این امر به یک ظرفیت شنت بزرگ نیاز دارد، متغیر ϕ نوسانات کوچکی خواهد داشت و پایداری نقطه‌ی کاری تا وقتی برقرار می‌ماند که:
$$|\phi| < \frac{\pi}{۲}.$$
جواب دیگر، یعنی $\phi_۲^{k=۱}$، به همان هامیلتونی منجر می‌شود، اما با تغییر متغیر:
$$\phi \mapsto \phi + \pi.$$
در این حالت، پایداری نقطه‌ی کاری به این معناست که:
$$|\phi + \pi| < \frac{\pi}{۲}.$$
بنابراین، یک کاهش معقول به یک هامیلتونی یک‌بعدی به‌دست می‌آوریم که در رژیم
$$E_C \ll E_J$$
قابل توجیه است. اما خواننده‌ی دقیق ممکن است نگران باشد که در اینجا مشکلی مشابه با وضعیت مطرح‌شده در بخش؟؟ وجود داشته باشد. یعنی، ایمن‌ترین کار این است که بررسی کنیم آیا نتیجه‌ای که به‌تازگی به‌دست آوردیم با حالتی سازگار است که در آن یک ظرفیت خازنی کوچک $C_۲$، متصل به گره $\Phi_۲$، حفظ شود یا نه. این مسئله به‌درستی با استفاده از روش بورن–اوپنهایمر بررسی می‌شود که در پیوست ۱۰ آمده است.

در اینجا فقط فیزیک وضعیت را به‌طور خلاصه بیان می‌کنیم: ظرفیت خازنی $C_۲$ نباید خیلی بزرگ باشد؛ به‌طور خاص باید داشته باشیم:
$$C_۲ \ll C.$$
در غیر این صورت، سیستم دارای دو درجه‌ی آزادی کاملاً مستقل خواهد بود. در عین حال، روش اویلر-لاگرانژی‌ای که همین حالا بیان کردیم، نیاز دارد که متغیر $\phi_۲$ به‌صورت کلاسیکی رفتار کند؛ به این معنا که نوسانات نقطه‌ی صفر آن، یعنی $\phi_{۲,\text{zpf}}$، کوچک باشد:
$$\phi_{۲,\text{zpf}} \ll ۱.$$
با استفاده از رابطه‌ی (؟؟)، به‌دست می‌آوریم:
$$\phi_{۲,\text{zpf}} = \left(\frac{۲E_{C۲}}{\gamma E_J}\right)^{۱/۴}. \qquad (۳\text{-}۱۹)$$

برای برآورده کردن قید مورد نظر، $C_۲$ در واقع نباید بیش از حد کوچک باشد؛ حتی برای $C_۲ = C/۱۰$، شرط

$$\phi_{۲,\mathrm{zpf}} \ll ۱$$

چندان خوب برقرار نیست. با این حال، پیامدهای این موضوع خیلی جدی نیستند. اگر

$$\phi_{۲,\mathrm{zpf}} \sim ۱$$

باشد، نشان داده می‌شود [۴۰] که رابطه‌ی (۳-۱۸) تقریباً درست باقی می‌ماند؛ با این تفاوت که جمله‌ی آخر به‌صورت

$$-۲\gamma\tilde{E}_J\cos(\phi)$$

درمی‌آید، که در آن ضریب نسبت به مقدار «خام» خود کمی کاهش یافته است:

$$\tilde{E}_J \lesssim E_J.$$

می‌گوییم انرژی جوزفسون مؤثر در این جمله، به‌وسیله‌ی نوسانات کوانتومی $\phi_۲$، «بازبهنجارش» renormalized شده است. مشکل واقعی زمانی ظاهر می‌شود که $C_۲$ بسیار کوچک باشد؛ زیرا در این حالت ضریب $\tilde{E}_J$ عملاً به صفر میل می‌کند و همه‌ی سهم‌های شاخه‌ای که شامل دو پیوند جوزفسون است، از دینامیک مدار به‌طور کامل حذف می‌شوند.

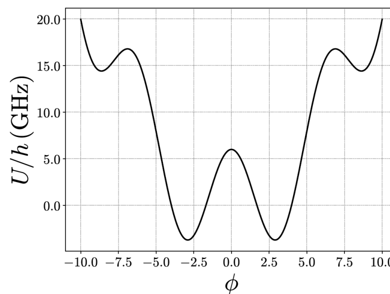
در پایان، نکته‌ای درباره‌ی هامیلتونی رابطه‌ی (۳-۱۸) بیان می‌کنیم: در نقطه‌ی کاری

$$\phi_{\mathrm{ext}} = \pi,$$

رابطه‌ی (۳-۱۸) برای $\gamma \leq ۲$ دارای یک چاه منفرد است، و برای $\gamma > ۲$ دارای چاه دوگانه می‌شود. در این حالت، این هامیلتونی کیوبیت شار شنت‌شده با خازنِ ناهماهنگ anharmonic C-shunted flux qubit را توصیف می‌کند.

در بخش بعدی، برای توصیف کیوبیت فلوکسونیوم، کاهش مشابهی، اما قوی‌تر، در تعداد متغیرها انجام می‌شود.

۳-۳-۴ کیوبیت فلوکسونیوم



شکل ۳-۵: نمونه‌ای از پتانسیل فلوکسونیوم به‌صورت $U = -E_J\cos(\phi + \phi_{\mathrm{ext}}) + E_L\phi^۲/۲$، بر حسب شار کاهش‌یافته، یا بی‌بُعد، ϕ، برای پارامترهای معمول فلوکسونیوم: $E_J/h = ۶{,}۰$ GHz، $E_L/h = ۰{,}۵$ GHz، و $\phi_{\mathrm{ext}} = \pi$.

دوباره یک CPB شنت‌شده با القاگر را مانند شکل ۲-۱۵در سمت راست در نظر می‌گیریم. هامیلتونی پایه‌ی آن را می‌توان، بر حسب متغیرهای بی‌بُعد، به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathcal{H} = ۴E_Cq^۲ - E_J\cos(\phi) + \frac{E_L}{۲}(\phi - \phi_{\mathrm{ext}})^۲, \qquad (۳\text{-}۲۰)$$

یا با یک تغییر متغیر:

$$\mathcal{H} = ۴E_C q^۲ - E_J \cos(\phi + \phi_{\text{ext}}) + \frac{E_L}{۲}\phi^۲. \qquad (۳-۲۱)$$

در اینجا سه مقیاس انرژی نقش دارند: انرژی شارژ E_C که در رابطه‌ی (۲,۱۱) تعریف شده است، انرژی جوزفسون E_J، و انرژی القایی E_L که در رابطه‌ی (۲,۲۲) تعریف شده است. می‌توان پرسید وقتی این مقیاس‌های انرژی را تغییر می‌دهیم چه اتفاقی می‌افتد. به‌طور خاص، رژیم فلوکسونیوم به‌صورت رژیمی تعریف می‌شود که در آن:

$$E_L/E_J \ll ۱,$$

در حالی که:

$$۱ \lesssim E_J/E_C \lesssim ۱۰,$$

اما نه خیلی بزرگ‌تر از آن [۴۹].

در این رژیم، پتانسیل سهمی‌وار کوچک ناشی از E_L چندان محدودکننده نیست و به دلیل پتانسیل جوزفسونی، چندین چاه پتانسیل وجود دارد. نمونه‌ای از پتانسیل فلوکسونیوم برای پارامترهای معمول در شکل ۳-۵ نشان داده شده است. برای کار در رژیم فلوکسونیوم، باید یک القاوری مؤثر بزرگ داشته باشیم:

$$L = L_{\text{eff}},$$

که نباید با یک ظرفیت خازنی مؤثر بزرگِ اضافی C_{eff} به‌صورت موازی همراه باشد. دلیل این موضوع آن است که می‌خواهیم تابع‌های موج در درجه‌ی آزادی شار ناموضعی شوند. یک ظرفیت شنت بزرگ و ناخواسته، در مقابل، تمایل دارد تابع‌های موج را موضعی کند و سیستم را در هر چاه فقط به‌طور ضعیفی ناهماهنگ سازد؛ مشابه کیوبیت ترنسمون که در فصل ۴ به‌طور مفصل بررسی می‌کنیم [۴۹]. به بیان دیگر، در مدار، پیوند جوزفسون باید عنصری با امپدانس بزرگ

$$Z = \sqrt{\frac{L_{\text{eff}}}{C_{\text{eff}}}}$$

را به‌صورت موازی با خود داشته باشد. این عنصر را «ابرالقاگر» superinductance می‌نامیم. به‌طور ایده‌آل، برای این عنصر باید کمیت بی‌بُعد

$$Z/R_Q \gtrsim ۱$$

برقرار باشد، که در آن R_Q کوانتوم مقاومت است:

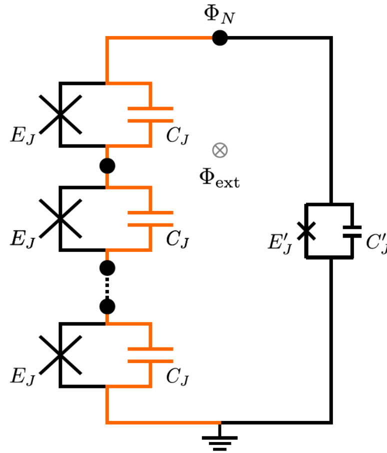
$$R_Q = \frac{h}{(۲e)^۲} \approx ۶,۵\,\text{k}\Omega. \qquad (۳-۲۲)$$

از نظر فیزیکی، به‌دست آوردن یک ابرالقاگر کار ساده‌ای نیست؛ به‌ویژه وقتی القاوری فقط ناشی از خودالقایی هندسی ماده باشد. چنین القاوری‌ای با اندازه‌ی قطعه‌ای از ماده‌ی ابررسانا، مانند تعداد دورهای سیم‌پیچ، افزایش می‌یابد و هم‌زمان با یک ظرفیت خازنی بزرگ همراه می‌شود که امپدانس Z را کاهش می‌دهد.

یک راه‌حل این است که از ماده‌ای با القاوری جنبشی بزرگ، مانند آلومینیوم دانه‌ای granular aluminum، استفاده شود تا یک ابرالقاگر مؤثر به‌دست آید [۵۰]. گزینه‌ی دیگر این است که با استفاده از آرایه‌ای از N پیوند جوزفسونِ سری، که در آن

$$N \gg ۱,$$

یک القاوری مؤثر مهندسی شود. در واقع، می‌توان ماده‌ای مانند آلومینیوم دانه‌ای، و منشأ القاوری جنبشی آن را، نیز به‌صورت یک آرایه‌ی تصادفی از تعداد بسیار زیادی جزیره‌ی ابررسانا مدل کرد که توسط پیوندهای جوزفسون به یکدیگر متصل شده‌اند [۵۰].



شکل ۳-۶: آرایه‌ای از N پیوند جوزفسون یکسان به‌صورت سری، که به‌صورت موازی با یک پیوند منفرد با $E_J \gg E'_J$ قرار دارد. این آرایه یک القاوری مؤثر بزرگ فراهم می‌کند که در کیوبیت فلوکسونیوم استفاده می‌شود. برای نمونه‌ی ساخته‌شده‌ی چنین آرایه‌ای، شکل ۳-۷ را ببینید.

مدار الکتریکی در شکل۳-۶ نشان داده شده است و یک کیوبیت فلوکسونیوم ساخته‌شده نیز در شکل ۳-۷ نمایش داده شده است. برای تحلیل مدار، از درختی با شاخه‌های نارنجی استفاده می‌کنیم؛ همان‌طور که در مدار با گره‌های $N, \ldots, ۲, ۱$ مشخص شده است. شار شاخه‌ی خازنی دو سر پیوند i-ام در آرایه را با Φ_{C_i} نشان می‌دهیم. لاگرانژی بر حسب این متغیرها به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$T = \frac{۱}{۲} C_J \sum_{i=۱}^{N} \dot{\Phi}_{C_i}^{۲} + \frac{۱}{۲} C_{J'} \dot{\Phi}_N^{۲}, \tag{۳-۲۳}$$

که در آن:

$$\Phi_N = \sum_{i=۱}^{N} \Phi_{C_i}.$$

انرژی پتانسیل برابر است با:

$$U = -E_{J'} \cos\left(\frac{۲\pi}{\Phi_۰}\Phi_b\right) - E_J \sum_{i=۱}^{N} \cos\left(\frac{۲\pi}{\Phi_۰}\Phi_{C_i}\right), \tag{۳-۲۴}$$

که در آن:

$$\Phi_b = -\Phi_N + \Phi_{\text{ext}}.$$

فرض می‌کنیم شارهای شاخه‌ای در آرایه همگی درجات آزادی «سنگین» را نشان می‌دهند؛ یعنی جرم بزرگی از مرتبه‌ی C_J دارند و شرط

$$\phi_{\text{zpf}} < ۱$$

برقرار است. از نظر ریاضی، این بدان معناست که فرض می‌کنیم:

$$E_J / E_{C_J} > ۱.$$

در نتیجه، پتانسیل را، با صرف‌نظر کردن از یک جمله‌ی ثابت، به‌صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$U \approx U_{\text{approx}} = -E_{J'} \cos\left(\frac{۲\pi}{\Phi_۰}(\Phi_N - \Phi_{\text{ext}})\right) + \frac{۱}{۲L_J} \sum_{i=۱}^{N} \Phi_{C_i}^{۲}, \tag{۳-۲۵}$$

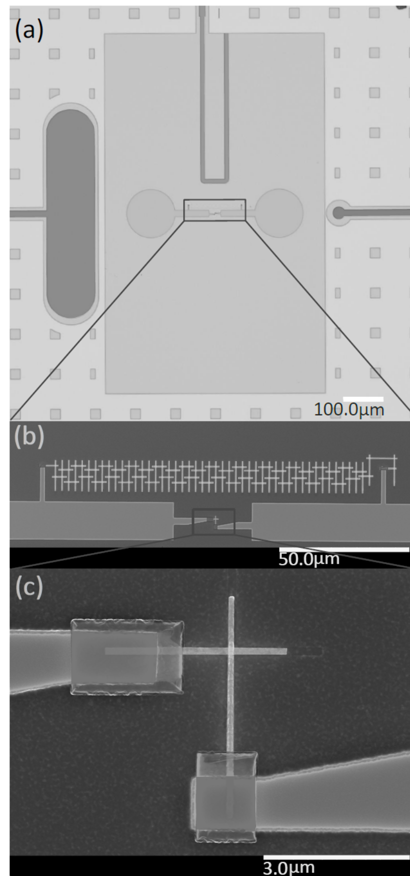
که در آن القاوری جوزفسون مطابق رابطه‌ی (۲-۲۶) تعریف شده است. هر پتانسیل

$$\frac{\Phi_{C_i}^{۲}}{۲L_J}$$

با L_J کوچک، شار شاخه‌ای Φ_{C_i} را به‌شدت محدود می‌کند. بنابراین، با توجه به اینکه

$$\Phi_N = \sum_{i=۱}^{N} \Phi_{C_i},$$

در حالی که Φ_N به‌دلیل جمله‌ی جوزفسونیِ پیوند منفرد تمایل دارد مقدار Φ_{ext} را بگیرد، هر یک از شارهای شاخه‌ای آرایه سهم کوچکی از این شار کل را حمل می‌کنند.



شکل ۳-۷: ریزنگاره‌ی نوری از یک تراشه شامل کیوبیت فلوکسونیوم fluxonium qubit، متعلق به آزمایشگاه Andersen در دانشگاه صنعتی دلفت Delft University of Technology، سال ۲۰۲۳؛ تصویر با اجازه‌ی Figen Yilmaz. الف) پدهای گرد، ظرفیت شنت بزرگ‌تر را فراهم می‌کنند. در سمت چپ، پدِ شبیه استادیوم، کوپلینگ خازنی به رزوناتور خوانش را ایجاد می‌کند؛ در قسمت بالا، یک خط شار برای کنترل مقدار شار مغناطیسی عبوری از حلقه دیده می‌شود؛ و در سمت راست، یک خط «بار» برای تحریک کیوبیت فلوکسونیوم مشاهده می‌شود. ب) آرایه‌ی بلند پیوندها شامل ۱۰۰ پیوند است که هرکدام اندازه‌ای برابر با ۴۱۰ × ۴۱۰ nm دارند و به‌صورت موازی با یک پیوند منفرد قرار گرفته‌اند. ج) بزرگ‌نمایی پیوند منفرد.

به‌دلیل پیوند موازی با مقیاس انرژی E'_J، طبیعی است که یک تقریب کم‌انرژی را در نظر بگیریم که در آن هر متغیر

$$\Phi_{C_i} = \frac{\Phi_N}{N}$$

دیگر به‌تنهایی دینامیک مستقل نداشته باشد. این حالت با یک کمینه‌ی موضعی از انرژی آرایه‌ی پیوندهای جوزفسون متناظر است؛ هرچند کمینه‌های دیگری نیز وجود دارند، تمرین ؟؟ را ببینید. برای بحثی بسیار خوب درباره‌ی آرایه‌های پیوند جوزفسون، خواننده را به مرجع [۳۵] ارجاع می‌دهیم.

در این تقریب، انرژی پتانسیل به‌صورت زیر است:

$$U_{\text{approx}} = -E'_J \cos\left(\frac{۲\pi}{\Phi_۰}(\Phi_N - \Phi_{\text{ext}})\right) + \frac{۱}{۲NL_J}\Phi_N^۲, \tag{۳-۲۶}$$

که در آن می‌بینیم یک القاوری مؤثر بزرگ به‌دست آمده است:

$$L_{\text{eff}} = NL_J.$$

در این تقریب، انرژی جنبشی برابر است با:

$$T = \frac{۱}{۲}\left(C'_J + \frac{C_J}{N}\right)\dot{\Phi}_N^۲ \quad \rightarrow \quad \frac{Q_N^۲}{۲(C'_J + C_J/N)}. \tag{۳-۲۷}$$

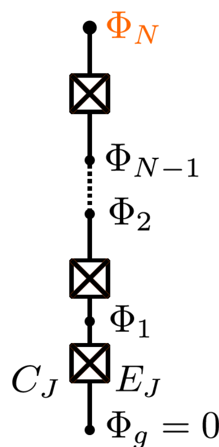
بنابراین می‌بینیم که آرایه، یک ظرفیت خازنی مؤثر

$$C_{\text{eff}} \approx \frac{C_J}{N}$$

را به‌صورت موازی با ظرفیت خازنی پیوند کوچک، یعنی C'_J، اضافه می‌کند. توجه کنید که C_J/N همان ظرفیت خازنی معادلِ N ظرفیت C_J است که به‌صورت سری قرار گرفته‌اند. در نتیجه، امپدانس مشخصه‌ی مؤثر آرایه برابر می‌شود با:

$$Z_{\text{array}} = \sqrt{\frac{L_{\text{eff}}}{C_{\text{eff}}}} = N\sqrt{\frac{L_J}{C_J}},$$

و این امپدانس به‌صورت خطی با تعداد پیوندها افزایش می‌یابد؛ بنابراین رسیدن به رژیم ابرالقاوری ممکن می‌شود.



شکل ۳-۸: آرایه‌ای از N پیوند جوزفسون.

تمرین ۱.۳.۳: آرایه‌ی پیوند جوزفسون مدار شکل ۳٫۸ را در نظر بگیرید که آرایه‌ای از N پیوند جوزفسونِ یکسان را نشان می‌دهد؛ هر پیوند دارای ظرفیت خازنی C_J و انرژی جوزفسون E_J است. آرایه‌های پیوندها برای

ایجاد القاوری بزرگی استفاده می‌شوند که برای کیوبیت فلوکسونیوم لازم است. در این تمرین، یک لاگرانژی مؤثر به‌دست خواهیم آورد که مدار را فقط به‌صورت تابعی از شار گره‌ای بی‌بُعد در انتهای آرایه، یعنی

$$\phi_N = \frac{۲\pi\Phi_N}{\Phi_۰},$$

نمایش می‌دهد؛ همان‌طور که در استدلال‌های بالا نیز طرح شد.

۱. نخست، لاگرانژی را بر حسب شارهای گره‌ای بی‌بُعد بنویسید:

$$\phi_k = \frac{۲\pi\Phi_k}{\Phi_۰}, \qquad k = ۱, \dots, N.$$

مسئله با معرفی شارهای شاخه‌ای بی‌بُعد در دو سر هر پیوند ساده‌تر فهمیده می‌شود. این شارهای شاخه‌ای را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\theta_k = \phi_{k+۱} - \phi_k.$$

سپس لاگرانژی را بر حسب این متغیرهای جدید می‌نویسیم. برای فشرده‌نویسی، مجموعه‌ی این متغیرها را به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\vec{\theta} = \{\theta_۱, \dots, \theta_N\}.$$

۲. اکنون فرض می‌کنیم که ϕ_N از بیرون تنظیم شده است و به‌عنوان یک پارامتر وارد مسئله می‌شود. بر حسب متغیرهای θ_k، این فرض به قید زیر تبدیل می‌شود:

$$\phi_N = \sum_{k=۱}^{N} \theta_k.$$

در حد

$$E_J/E_{C_J} \gg ۱$$

انتظار داریم سیستم به‌صورت کلاسیکی در یکی از کمینه‌های، احتمالاً فراپایدار، پتانسیل قرار بگیرد. مسئله را به‌صورت یک بهینه‌سازی مقید فرمول‌بندی کنید و تأیید کنید که نقطه‌ی

$$\vec{\theta}^{\,۰} : \qquad \forall k, \qquad \theta_k^{۰} = \frac{\phi_N}{N}, \tag{۳-۲۸}$$

و همچنین نقاطی که با $\pm, l = ۱, ۲, \dots, N$ برچسب‌گذاری می‌شوند:

$$\vec{\theta}^{\pm,l} : \qquad \theta_l^{\pm,l} = \frac{\phi_N \mp ۲\pi}{N} \pm ۲\pi, \qquad \theta_{k\neq l}^{\pm,l} = \frac{\phi_N \mp ۲\pi}{N}, \tag{۳-۲۹}$$

نقاط اکسترمم پتانسیل هستند. توجه کنید که پیکربندی‌هایی که با lهای متفاوت برچسب‌گذاری شده‌اند، از یکدیگر قابل تمایز نیستند؛ زیرا سهم‌های یکسانی در لاگرانژی ایجاد می‌کنند. بنابراین می‌توان آن‌ها را فقط با علامت $\pm$ برچسب‌گذاری کرد.

توضیح: این‌ها تنها اکسترمم‌های پتانسیل نیستند، همان‌طور که در پاسخ نشان می‌دهیم.

۳. نشان دهید که $\vec{\theta}^{\,۰}$ زمانی کمینه‌ی پتانسیل است که ϕ_N/N به‌اندازه‌ی کافی کوچک باشد.

۴. از دیدگاه کوانتومی، انتظار داریم حالت‌هایی موضعی در چنین کمینه‌ای، یعنی $\vec{\theta}^{\,۰}$، داشته باشیم. در چه حدی از پارامترها انتظار دارید تونل‌زنی از یک کمینه به کمینه‌ی دیگر سرکوب شود؟

۵. اکنون ϕ_N را به یک متغیر دینامیکی ارتقا می‌دهیم. فرض کنید سیستم در ابتدا در کمینه‌ای قرار دارد که با رابطه‌ی (۳-۲۸) داده شده است. اگر متغیر ϕ_N نسبتاً آهسته تغییر کند، می‌توان فرض کرد که سیستم به‌صورت آدیاباتیک کمینه را دنبال می‌کند. در این تقریب، یک لاگرانژی مؤثر برای سیستم بر حسب متغیر $\phi_N(t)$ به‌دست آورید. چرا این سیستم در حد N بزرگ مانند یک القاوری بزرگ رفتار می‌کند؟

پاسخ تمرین ۳.۳.۱

۱. لاگرانژی بر حسب شارهای گره‌ای بی‌بُعد به‌صورت زیر نوشته می‌شود:
(۳-۳۰)

$$\mathcal{L}(\phi_۱,\ldots,\phi_N;\dot{\phi}_۱,\ldots,\dot{\phi}_N)=\sum_{k=۰}^{N-۱}\left(\frac{\hbar^۲}{۱۶E_{C_J}}(\dot{\phi}_{k+۱}-\dot{\phi}_k)^۲+E_J\cos(\phi_{k+۱}-\phi_k)\right),$$

که در آن

$$\phi_۰=۰=\dot{\phi}_۰.$$

یا بر حسب فازهای تازه تعریف‌شده، داریم:

$$\mathcal{L}(\theta_۱,\ldots,\theta_N;\dot{\theta}_۱,\ldots,\dot{\theta}_N)=\sum_{k=۱}^{N}\left(\frac{\hbar^۲}{۱۶E_{C_J}}\dot{\theta}_k^۲+E_J\cos\theta_k\right). \qquad (۳\text{-}۳۱)$$

همچنین پتانسیل را به‌صورت زیر شناسایی می‌کنیم:

$$U(\theta_۱,\ldots,\theta_N)=-\sum_{k=۱}^{N}E_J\cos\theta_k. \qquad (۳\text{-}۳۲)$$

۲. مسئله را به‌صورت یک مسئله‌ی بهینه‌سازی مقید و با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ فرمول‌بندی می‌کنیم. قید مسئله برابر است با:

$$g(\vec{\theta})=\sum_{k=۱}^{N}\theta_k-\phi_N=۰. \qquad (۳\text{-}۳۳)$$

تابع لاگرانژ را، که نباید با لاگرانژی سیستم اشتباه گرفته شود، به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$\Lambda(\vec{\theta},\lambda)=\lambda g(\vec{\theta})+U(\vec{\theta}), \qquad (۳\text{-}۳۴)$$

که در آن λ ضریب لاگرانژ است. بنابراین کافی است بررسی کنیم که گرادیان تابع لاگرانژ در نقاط روابط (۳-۲۸) و (۳-۲۹) صفر می‌شود. با صفر قرار دادن گرادیان، معادلات زیر به‌دست می‌آیند:

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\theta_k}=۰ \quad\Rightarrow\quad E_J\sin\theta_k+\lambda=۰, \qquad (۳\text{-}۳۵)$$

و

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\lambda}=۰ \quad\Rightarrow\quad \phi_N-\sum_{k=۱}^{N}\theta_k=۰. \qquad (۳\text{-}۳۶)$$

با جایگذاری رابطه‌ی(۳-۲۸) در رابطه‌ی (۳-۳۶)، واقعاً یک اکسترمم به‌دست می‌آید، به شرط آنکه:

$$\lambda = -E_J \sin(\phi_N/N).$$

همچنین با جایگذاری رابطه‌ی (۳-۲۹) در رابطه‌ی (۳-۳۵) داریم:

$$E_J \sin\left(\frac{\phi_N \mp ۲\pi}{N} \pm ۲\pi\delta_{kl}\right) + \lambda = ۰ \quad \Rightarrow \quad E_J \sin\left(\frac{\phi_N \mp ۲\pi}{N}\right) + \lambda = ۰, \quad (۳\text{-}۳۷)$$

که با انتخاب

$$\lambda = -E_J \sin\left(\frac{\phi_N \mp ۲\pi}{N}\right)$$

برقرار می‌شود. علاوه بر این، رابطه‌ی (۳-۳۶) نیز به‌سادگی بررسی می‌شود:

$$\phi_N - \sum_{k=۱}^{N}\left(\frac{\phi_N \mp ۲\pi}{N} \pm ۲\pi\delta_{kl}\right) = \phi_N - \phi_N \pm ۲\pi \mp ۲\pi = ۰. \quad (۳\text{-}۳۸)$$

یک جواب کاملاً کلی برای معادلات (۳-۳۵) و (۳-۳۶) با انتخاب یکی از دو حالت زیر برای هر k به‌دست می‌آید:

$$\theta_k = \alpha + ۲\pi m_k \quad \text{یا} \quad \theta_k = \pi - \alpha + ۲\pi m_k, \quad (۳\text{-}۳۹)$$

و سپس α طوری تعیین می‌شود که رابطه‌ی (۳-۳۶) برقرار شود. فرض کنید برای مجموعه‌ای S از θ_kها، جواب

$$\theta_k = \alpha + ۲\pi m_k$$

را انتخاب کنیم و برای بقیه‌ی آن‌ها جواب دوم را. در این صورت به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\alpha = \frac{\phi_N}{۲|S| - N} - \pi\frac{۲m + N - |S|}{۲|S| - N}, \quad (۳\text{-}۴۰)$$

که در آن

$$m = \sum_{i=۱}^{N} m_i.$$

بنابراین یک جواب کاملاً کلی را می‌توان با بردار

$$\vec{m} = (m_۱, m_۲, \ldots, m_N), \qquad m_i \in \mathbb{Z},$$

و یک مجموعه‌ی

$$S \subseteq [N]$$

برچسب‌گذاری کرد:

$$\vec{\theta}^{\vec{m},S} : \begin{cases} \theta_{k\in S} = \dfrac{\phi_N - ۲\pi m + \pi(|S| - N)}{۲|S| - N} + ۲\pi m_k, \\ \theta_{k\notin S} = \dfrac{-\phi_N + ۲\pi m + \pi|S|}{۲|S| - N} + ۲\pi m_k. \end{cases} \quad (۳\text{-}۴۱)$$

توجه کنید که این پیکربندی‌ها در اصل فقط با عدد کل $m \in \mathbb{Z}$ و $|S|$ از یکدیگر متمایز می‌شوند؛ زیرا لاگرانژی در رابطه‌ی (۳-۳۱) به عدد مشخص m_kها وابسته نیست، تا وقتی که پیوندها همگی یکسان باشند، و S نیز دینامیکی ندارد. وقتی $|S| = N$ باشد، رابطه‌ی (۳-۴۱) به شکل ساده‌ی زیر درمی‌آید:

$$\vec{\theta}^{\vec{m}}: \qquad \theta_k = \frac{\phi_N - ۲\pi m}{N} + ۲\pi m_k. \tag{۳-۴۲}$$

این رابطه پیکربندی‌ای را نشان می‌دهد که در مجموع دارای m لغزش فاز است و پیوند k دارای $m_k \in \mathbb{Z}$ لغزش فاز است.

۳. باید بررسی کنیم که آیا ماتریس هسین $(N-۱) \times (N-۱)$ مثبت‌نیمه‌معین است یا نه:

$$H \geq ۰,$$

که در آن درایه‌های ماتریس برای $i, j = ۱, \ldots, N-۱$ برابرند با:

$$\frac{H_{ij}}{E_J} = \frac{۱}{E_J}\frac{\partial^۲ U}{\partial\phi_j \partial\phi_i} = \frac{\partial}{\partial\phi_j}\left[\sin(\phi_{i+۱} - \phi_i) - \sin(\phi_i - \phi_{i-۱})\right].$$

در نتیجه:

$$\frac{H_{ij}}{E_J} = -\delta_{j,i+۱}\cos(\phi_{i+۱} - \phi_i) + \delta_{ij}\left[\cos(\phi_{i+۱} - \phi_i) + \cos(\phi_i - \phi_{i-۱})\right] - \delta_{j,i-۱}\cos(\phi_i - \phi_{i-۱}).$$

در اینجا

$$\phi_۰ = ۰$$

و ϕ_N داده شده است. در نقطه‌ی $\vec{\theta}^{۰}$، این رابطه می‌دهد:

$$\frac{H_{ij}}{E_J} = -\cos(\phi_N/N)\left(\delta_{j,i+۱} - ۲\delta_{ij} + \delta_{j,i-۱}\right) \approx -\delta_{j,i+۱} + ۲\delta_{ij} - \delta_{j,i-۱} + O\left(\frac{\phi_N^۲}{N^۲}\right),$$

که یک ماتریس مثبت‌نیمه‌معین را نشان می‌دهد.

۴. انتظار داریم تونل‌زنی در حدی سرکوب شود که در آن اساساً هیچ تونل‌زنی‌ای نتواند رخ دهد؛ یعنی در حد کلاسیکی

$$E_J/E_{C_J} \gg ۱,$$

یا معادل آن، وقتی ϕ_{zpf} در رابطه‌ی (؟؟)، با در نظر گرفتن E_L به‌عنوان $E_{L,J}$، کوچک باشد. سرکوب تونل‌زنی در واقع به‌صورت نمایی با این نسبت انجام می‌شود:

$$\sim \exp\left(-\sqrt{۸E_J/E_{C_J}}\right).$$

۵. در چارچوب فرضی که در متن توضیح داده شد، این تقریب فقط فرض می‌کند که رابطه‌ی (۳-۲۸) حتی زمانی که متغیر ϕ_N با زمان تغییر می‌کند، همواره برقرار است. توجه کنید که این یک تقریب کم‌انرژی است و از دیدگاه کوانتوم‌مکانیکی به‌طور اساسی بر این واقعیت تکیه دارد که تونل‌زنی میان کمینه‌های مختلف سرکوب شده باشد؛ همان‌طور که در بند قبلی توضیح داده شد. لاگرانژی مؤثر بر حسب فاز دو سر آرایه، با جایگذاری رابطه‌ی (۳-۲۸) در رابطه‌ی(۳-۳۱)، به‌دست می‌آید:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{\hbar^۲}{۱۶E_{C_J}N}\dot{\phi}^۲ + NE_J\cos\frac{\phi}{N}, \tag{۳-۴۳}$$

که در آن، برای سادگی، فقط نوشته‌ایم:

$$\phi_N = \phi.$$

از رابطه‌ی (۳-۴۳) می‌بینیم که بر حسب متغیر جمعی ϕ_N، آرایه یک ظرفیت خازنی مؤثر

$$\frac{C_J}{N}$$

فراهم می‌کند؛ که همان ظرفیت معادل همه‌ی ظرفیت‌های خازنیِ سری است. همچنین پتانسیل مؤثر برابر است با:

$$U_{\text{eff}} = -NE_J \cos \frac{\phi}{N}. \qquad (۳-۴۴)$$

برای فهم اینکه چرا انتظار داریم این سیستم مانند یک القاوری بزرگ رفتار کند، کافی است رابطه‌ی قبل را تا مرتبه‌ی دوم بسط دهیم. با صرف‌نظر کردن از جمله‌ی ثابت، داریم:

$$U_{\text{eff}} \approx \frac{E_J \phi^۲}{۲N}. \qquad (۳-۴۵)$$

بنابراین، در حالی که ظرفیت خازنی معادل به‌صورت $۱/N$ کاهش می‌یابد، القاوری معادل متناسب با N افزایش پیدا می‌کند.

۳-۳-۵ مدارهایی برای تونل‌زنی دو جفت کوپر: کیوبیت $\pi - ۰$

ایده‌ی کیوبیت (π-۰) این است که به‌طور مؤثر هامیلتونی‌ای با فرم تقریبی زیر مهندسی شود:

$$H = ۴E_C \hat{q}^۲ - E_J^{\text{eff}} \cos(۲\hat{\phi}), \qquad (۳-۴۶)$$

به‌گونه‌ای که جمله‌ی پتانسیل متناظر با تونل‌زنی «دو جفت کوپر» باشد. همان‌طور که در بخش۴-۱-۱ بحث خواهیم کرد، جمله‌ی

$$\cos \hat{\phi} = \frac{۱}{۲} \left(e^{i\hat{\phi}} + e^{-i\hat{\phi}} \right)$$

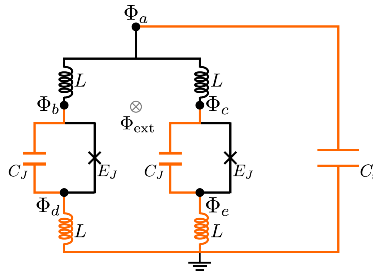
را می‌توان به‌عنوان توصیفی از تونل‌زنی یک جفت کوپر منفرد از یک جزیره به جزیره‌ی دیگر، و برعکس، در نظر گرفت. وقتی

$$E_C \ll E_J^{\text{eff}},$$

هامیلتونی دارای دو حالت پایه‌ی تقریباً هم‌تراز است که تابع‌های موج آن‌ها، یعنی $\psi_{۰,۱}(\phi)$، در نقاط

$$\phi = ۰ \qquad و \qquad \phi = \pi$$

موضعی شده‌اند؛ یعنی در نقاطی که انرژی پتانسیل کمینه می‌شود. از آنجا که این تابع‌های موج $\psi_{۰,۱}(\phi)$، به دلیل موضعی شدن در مقادیر بسیار متفاوت ϕ، هم‌پوشانی کمی دارند، یک حفاظت ذاتی در برابر نویز ایجاد می‌شود؛ برای توضیح بیشتر به بخش ۷-۳-۱ مراجعه کنید. بسیاری از ویژگی‌های کیوبیت (π-۰) در مرجع [۵۱] بحث شده‌اند. استخراج پتانسیل مؤثر در رابطه‌ی (۳-۴۶) با نوشتن یک هامیلتونی کامل آغاز می‌شود و سپس، مانند مثال‌های دیگر، تعداد درجات آزادی کاهش داده می‌شود. ابتدا نمونه‌ای از مداری را بررسی می‌کنیم که برای ساختن یک پتانسیل از نوع $\cos(۲\phi)$ طراحی شده است و در مرجع [۵۲] پیشنهاد شده است.



شکل ۳-۹: مدار ابررسانایی تحلیل‌شده در مرجع [۵۲]؛ یک درخت پوشا با رنگ نارنجی رسم شده است.

این مدار در شکل۳-۹ نشان داده شده است. در اینجا روی ویژگی‌های خاص و جالب این کیوبیتِ دو جفت کوپری تمرکز نمی‌کنیم، بلکه فقط مراحل فنی به‌دست آوردن هامیلتونی را دنبال می‌کنیم. تمرین (۲.۳.۳) مدار استاندارد کیوبیت (π-۰) را که در مرجع [۵۳] معرفی شده است، تحلیل خواهد کرد. توجه می‌کنیم که برای مدار شکل (۹.۳)، در گراف مداری هیچ درخت پوشایی وجود ندارد که همه‌ی شاخه‌های آن خازنی باشند؛ شرطی که برای گزاره‌ی (۱.۱.۳) لازم بود. بنابراین با متغیرهای مستقلِ شار شاخه‌ای کار می‌کنیم. با استفاده از درخت پوشایی که در شکل (۹.۳) با رنگ نارنجی مشخص شده است، می‌بینیم که پنج شار گره‌ای مستقل وجود دارد:

$$\Phi_a, \ldots, \Phi_e.$$

ماتریس ظرفیت خازنی بر حسب این متغیرها وارون‌پذیر نیست، بنابراین از متغیرهای شاخه‌ای زیر استفاده می‌کنیم:

$$\Phi_1 = \Phi_b - \Phi_d, \qquad \Phi_2 = \Phi_c - \Phi_e, \qquad \Phi_3 = \Phi_a, \qquad \Phi_4 = \Phi_d, \qquad \Phi_5 = \Phi_e. \quad (۴۷\text{-}۳)$$

بر حسب این متغیرها، لاگرانژی برابر است با:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \frac{C_s}{2}\dot{\Phi}_3^2 + \frac{C_J}{2}\left(\dot{\Phi}_1^2 + \dot{\Phi}_2^2\right) + E_J\cos\left(\frac{2\pi}{\Phi_0}\Phi_1\right) + E_J\cos\left(\frac{2\pi}{\Phi_0}\Phi_2\right) \\ - \frac{1}{2L}\left[\Phi_4^2 + \Phi_5^2 + (\Phi_3 - \Phi_1 - \Phi_4 + \Phi_{\text{ext}})^2 + (\Phi_3 - \Phi_5 - \Phi_2)^2\right].\end{aligned} \quad (۴۸\text{-}۳)$$

متغیرهای Φ_4 و Φ_5 دینامیک ندارند، زیرا انرژی جنبشی آن‌ها صفر است. بنابراین این متغیرها را در کمینه‌ی انرژی پتانسیلشان، یعنی در یک اکسترمم پایدار، قرار می‌دهیم:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_4} = 0, \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_5} = 0.$$

این کار منجر می‌شود به:

$$\Phi_4 = \frac{1}{2}(\Phi_3 - \Phi_1 + \Phi_{\text{ext}}), \qquad \Phi_5 = \frac{1}{2}(\Phi_3 - \Phi_2). \quad (۴۹\text{-}۳)$$

این روابط را می‌توان دوباره در $\mathcal{L}$ جایگذاری کرد تا وابستگی به این متغیرها حذف شود. سه متغیر باقی‌مانده دوباره به‌صورت خطی به متغیرهای مستقل و باز-مقیاس‌شده‌ی جدید تبدیل می‌شوند:

$$\phi = \frac{2\pi}{\Phi_0}(\Phi_1 - \Phi_2), \qquad \chi = \frac{2\pi}{\Phi_0}\left[\frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_2)\right], \qquad \theta = \frac{2\pi}{\Phi_0}\left[\frac{1}{2}(2\Phi_3 - \Phi_2 - \Phi_1 + \Phi_{\text{ext}})\right]. \quad (۵۰\text{-}۳)$$

بنابراین انرژی جنبشی T و انرژی پتانسیل U به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned}T &= \frac{C_s}{2}\frac{\Phi_0^2}{4\pi^2}(\dot{\theta} + \dot{\chi})^2 + C_J\frac{\Phi_0^2}{4\pi^2}\dot{\chi}^2 + \frac{C_J}{4}\frac{\Phi_0^2}{4\pi^2}\dot{\phi}^2, \\ U &= -E_J\cos\left(\chi + \frac{\phi}{2}\right) - E_J\cos\left(\chi - \frac{\phi}{2}\right) + \frac{E_L}{2}\left[\frac{1}{4}(\phi - \phi_{\text{ext}})^2 + \theta^2\right],\end{aligned} \quad (۵۱\text{-}۳)$$

که در آن

$$\phi_{\text{ext}} = \frac{۲\pi\Phi_{\text{ext}}}{\Phi_۰},$$

و انرژی القایی E_L همان است که در رابطه‌ی(۲-۲۲) تعریف شد. پس ماتریس ظرفیت خازنی متناظر با مختصات ϕ، χ و θ برابر است با:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{C_J}{۲} & ۰ & ۰ \\ ۰ & C_s + ۲C_J & C_s \\ ۰ & C_s & C_s \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C^{-۱} = \frac{۱}{C_J}\begin{pmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ ۰ & -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} + \frac{C_J}{C_s} \end{pmatrix}. \qquad (۳\text{-}۵۲)$$

با استفاده از وارون ماتریس ظرفیت خازنی ($C^{-۱}$)، تعریف تکانه‌های مزدوج بی‌بُعد:

$$q_\phi = \frac{۱}{\hbar}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}, \qquad q_\chi = \frac{۱}{\hbar}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\chi}}, \qquad q_\theta = \frac{۱}{\hbar}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}, \qquad (۳\text{-}۵۳)$$

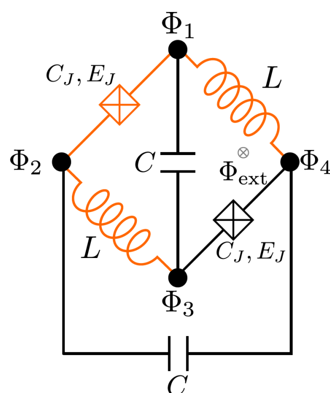
و رابطه‌ی (A.۹)، هامیلتونی نهایی را به‌دست می‌آوریم:

$$\mathcal{H} = ۴E_{C_J}\left[۴q_\phi^۲ + (q_\chi - q_\theta)^۲ + ۲\frac{C_J}{C_s}q_\theta^۲\right] - ۲E_J\cos(\chi)\cos\left(\frac{\phi}{۲}\right) + \frac{E_L}{۲}\left[\frac{۱}{۴}(\phi - \phi_{\text{ext}})^۲ + \theta^۲\right], \qquad (۳\text{-}۵۴)$$

که در آن E_{C_J} انرژی شارژ متناظر با C_J است؛ رابطه‌ی (۲-۲۱) را ببینید. در مرجع [۵۲] بیشتر نشان داده می‌شود که در حدی شبیه به فلوکسونیوم و برای

$$\phi_{\text{ext}} = \pi,$$

سیستم به‌طور مؤثر مانند عنصری با پتانسیل $\cos(۲\chi)$ رفتار می‌کند.



شکل ۳-۱۰: مدار کیوبیت $(۰\text{-}\pi)$ در تمرین (۳.۳.۲).

تمرین ۳.۳.۲: کیوبیت $(۰\text{-}\pi)$ در این تمرین، مدار اصلی کیوبیت $(۰\text{-}\pi)$ را که در شکل ؟؟ نشان داده شده است، بررسی می‌کنیم.

۱. لاگرانژی مدار را به‌دست آورید؛ درخت پوشای نارنجی را در نظر بگیرید و گره ۳ را به‌عنوان گره زمین قراردادی انتخاب کنید، یعنی:

$$\Phi_۳ = ۰.$$

۲. لاگرانژی قبلی را بر حسب متغیرهای زیر بازنویسی کنید:

$$\Phi = \frac{۱}{۲}\left[(\Phi_۲ - \Phi_۳) + (\Phi_۴ - \Phi_۱)\right], \tag{۵۵-۳}$$

$$X = \frac{۱}{۲}\left[(\Phi_۲ - \Phi_۳) - (\Phi_۴ - \Phi_۱)\right], \tag{۵۶-۳}$$

$$\Theta = \frac{۱}{۲}\left[(\Phi_۲ - \Phi_۱) - (\Phi_۴ - \Phi_۳)\right]. \tag{۵۷-۳}$$

هامیلتونی را نیز به‌دست آورید. وقتی مسئله بر حسب این متغیرها بیان می‌شود، آن را چگونه تفسیر می‌کنید؟ کدام درجه‌ی آزادی باید به‌صورت دوره‌ای در نظر گرفته شود؟ برای نگاشت رسمی‌تر از متغیرهای حقیقی به متغیرهای دوره‌ای، بخش ۴-۱-۱ را نیز ببینید. اگر در پارامترها بی‌نظمی وجود داشته باشد و آن‌ها، برخلاف فرض شکل ۳-۱۰ کاملاً برابر نباشند، انتظار دارید چه اتفاقی رخ دهد؟

۳. با در نظر گرفتن متغیرهای فازی باز-مقیاس‌شده

$$\phi = \frac{۲\pi\Phi}{\Phi_۰}, \qquad \theta = \frac{۲\pi\Theta}{\Phi_۰}, \qquad \phi_{\text{ext}} = \frac{۲\pi\Phi_{\text{ext}}}{\Phi_۰},$$

پتانسیل $U(\phi, \theta)$ را برای این متغیرها رسم کنید. پارامترها را به‌صورت زیر بگیرید:

$$E_J = ۱, \qquad \frac{E_J}{E_L} = ۱۵۰, \qquad E_L = \frac{\Phi_۰^۲}{۴\pi^۲ L}, \qquad \Phi_{\text{ext}} = ۰,$$

و بازه‌ها را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\phi \in [-۲۰, ۲۰], \qquad \theta \in [-\pi/۲, ۳\pi/۲].$$

۴. کیوبیت (۰-π) در رژیم

$$C \gg C_J$$

کار می‌کند. کدام متغیرها انرژی جنبشی بزرگ دارند و کدام متغیرها انرژی جنبشی کوچک دارند؟ در نتیجه، کدام متغیرها را می‌توان تقریباً در کمینه‌ی انرژی پتانسیلشان قرار داد، زیرا نوسانات نقطه‌ی صفر آن‌ها کوچک است؟

۵. با نگاه به پتانسیل، به‌صورت کیفی توضیح دهید که انتظار دارید تابع‌های موج کم‌انرژی چگونه توزیع شوند و چرا می‌توان گفت این مدار یک کیوبیت (۰-π) را محقق می‌کند.

۱

[۱] در این حالت، اگر یک ظرفیت بسیار کوچک، مثلاً بین گره‌های a و b، اضافه شود تا ماتریس ظرفیت خازنی وارون‌پذیر شود، اتفاق مسئله‌داری رخ نمی‌دهد؛ این کار فقط یک درجه‌ی آزادی پرانرژی و بی‌ضرر اضافه می‌کند.

پاسخ تمرین ۳.۳.۲

۱. بر حسب شارهای گره‌ای، لاگرانژی مدار به‌صورت زیر است:

$$\mathcal{L}(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_4; \dot{\Phi}_1, \dot{\Phi}_2, \dot{\Phi}_4) = \frac{C}{2}\dot{\Phi}_1^2 + \frac{C}{2}(\dot{\Phi}_2 - \dot{\Phi}_4)^2 + \frac{C_J}{2}\dot{\Phi}_4^2 + \frac{C_J}{2}(\dot{\Phi}_1 - \dot{\Phi}_2)^2 - \frac{\Phi_2^2}{2L} - \frac{1}{2L}(\Phi_1 - \Phi_4)^2 + E_J \cos\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}(\Phi_1 - \Phi_2)\right] + E_J \cos\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}(\Phi_4 - \Phi_{\text{ext}})\right]. \tag{۳-۵۸}$$

۲. با وارون کردن روابط (۳-۵۵) تا (۳-۵۷)، به‌دست می‌آوریم:

$$\Phi_1 = X - \Theta, \tag{۳-۵۹}$$

$$\Phi_2 = \Phi + X, \tag{۳-۶۰}$$

$$\Phi_4 = \Phi - \Theta. \tag{۳-۶۱}$$

لاگرانژی را بر حسب متغیرهای جدید به‌شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\mathcal{L}(\Phi, X, \Theta; \dot{\Phi}, \dot{X}, \dot{\Theta}) = C\dot{X}^2 + C_J\dot{\Phi}^2 + (C + C_J)\dot{\Theta}^2 - \frac{X^2}{L} - \frac{\Phi^2}{L} + E_J \cos\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}(\Phi + \Theta)\right] + E_J \cos\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}(\Phi - \Theta - \Phi_{\text{ext}})\right]. \tag{۳-۶۲}$$

می‌بینیم که این تغییر متغیر، جمله‌ی انرژی جنبشی را قطری می‌کند؛ برای مثال جمله‌ای از نوع $\dot{X}\dot{\Phi}$ نداریم. علاوه بر این، متغیر X از دو متغیر دیگر جدا می‌شود و صرفاً یک نوسان‌گر هماهنگ ایجاد می‌کند. با تعریف متغیرهای مزدوج به‌صورت:

$$Q_\Phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} = 2C_J\dot{\Phi}, \tag{۳-۶۳}$$

$$Q_X = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}} = 2C\dot{X}, \tag{۳-۶۴}$$

$$Q_\Theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Theta}} = 2(C + C_J)\dot{\Theta}, \tag{۳-۶۵}$$

هامیلتونی برابر می‌شود با:

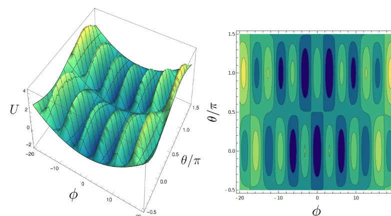
$$\mathcal{H}(\Phi, X, \Theta; Q_\Phi, Q_X, Q_\Theta) = \frac{Q_X^2}{4C} + \frac{Q_\Phi^2}{4C_J} + \frac{Q_\Theta^2}{4(C + C_J)} + \frac{X^2}{L} + \frac{\Phi^2}{L} - E_J \cos\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}(\Phi + \Theta)\right] - E_J \cos\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}(\Phi - \Theta - \Phi_{\text{ext}})\right]. \tag{۳-۶۶}$$

هامیلتونی نسبت به Θ با دوره‌ی Φ، دوره‌ای است. این یعنی می‌توانیم Θ را به‌طور مؤثر به‌عنوان یک متغیر دوره‌ای، یا فشرده، در نظر بگیریم. توجه کنید که علت این موضوع آن است که مدار کیوبیت (π-۰) از دو جزیره‌ی ابررسانا تشکیل شده است. اگر در پارامترها بی‌نظمی وجود داشته باشد، انتظار داریم متغیر X دیگر به‌طور کامل از دو متغیر دیگر جدا نشود و در نتیجه مقداری کوپلینگ ناخواسته ایجاد شود.

۳. بر حسب متغیرهای جدید، پتانسیل $U(\phi,\theta)$ را به‌صورت زیر شناسایی می‌کنیم:

$$U(\phi,\theta) = E_L\phi^{۲} - E_J\cos(\phi+\theta) - E_J\cos(\phi-\theta-\phi_{\text{ext}}). \qquad (۳\text{-}۶۷)$$

پتانسیل برای پارامترهای خواسته‌شده در شکل۳-۱۱ رسم شده است.



شکل ۳-۱۱: پتانسیل کیوبیت (π-۰).

۴. وقتی

$$C \gg C_J,$$

متغیرهای X و Θ انرژی جنبشی نسبتاً کمی دارند؛ البته این موضوع به E_J و $۱/L$ نیز وابسته است. در مقابل، متغیر Φ انرژی جنبشی نسبتاً بزرگی دارد.

۵. می‌بینیم که پتانسیل دارای دو مجموعه از کمینه‌های موضعی در

$$\theta = ۰ \qquad \text{و} \qquad \theta = \pi$$

است. This موضوع نشان می‌دهد که اگر

$$C \gg C_J,$$

تابع‌های موج کم‌انرژی نیز به دو مجموعه تقسیم می‌شوند که در

$$\theta = ۰, \pi$$

موضعی هستند، اما در متغیر ϕ ناموضعی‌اند. این موضوع نام کیوبیت (π-۰) را توجیه می‌کند.

۳-۳-۶ مدار نوار موبیوس

از آنجا که تراشه‌های ابررسانا روی زیرلایه‌های دوبعدی ساخته می‌شوند، گراف‌های معمول مدارهای الکتریکی، گراف‌های صفحه‌ای هستند. با این حال، می‌توان مدارهای الکتریکی غیرصفحه‌ای را نیز در نظر گرفت؛ مدارهایی که ممکن است نیازمند ساخت پیوندهای جوزفسون خارج از صفحه [۵۴]، استفاده از پل‌های هوایی air-bridges، یا کوپلرهای غیرصفحه‌ای باشند [۱۶]. برای مثال، می‌توان کوپلرهای دوربردی را تصور کرد که در دو طرف یک تراشه‌ی دوبعدی، صفحه‌ای و در نتیجه بدون تقاطع هستند؛ مشابه آنچه در یک گراف دوصفحه‌ای biplanar graph نامیده می‌شود.

صرف‌نظر از مسائل ساخت، می‌توان ساختارهای غیرصفحه‌ای را در نظر گرفت و پرسید آیا این ساختارها امکان ایجاد کیوبیت‌های جدید با حفاظت تقویت‌شده را فراهم می‌کنند یا نه؛ شاید از طریق بهره‌گیری از تقارن‌ها. در این بخش

و در بخش ۳-۴-۱، دو مدار نمونه‌ی احتمالاً غیرصفحه‌ای از ادبیات علمی را بررسی می‌کنیم و روش به‌دست آوردن لاگرانژی مدار را روی آن‌ها اعمال می‌کنیم.

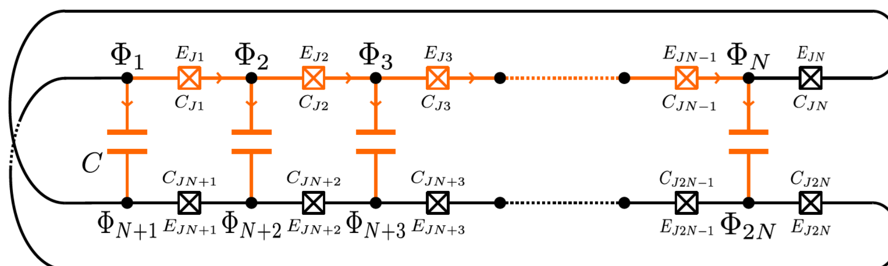


شکل ۳-۱۲: یک نوار موبیوس Möbius strip.

نوار موبیوس، که در شکل (۱۲.۳) نشان داده شده است، یک سطح غیرجهت‌پذیرِ شناخته‌شده با یک منحنی مرزی منفرد است. مداری با توپولوژی نوار موبیوس را در نظر می‌گیریم که در آن منحنی مرزی از زنجیره‌ای از پیوندهای جوزفسون ساخته شده است و این پیوندها از طریق ظرفیت‌های خازنی در عرض نوار به هم متصل شده‌اند؛ همان‌طور که در شکل (۱۳.۳) نشان داده شده است. این مدار نخستین بار در مرجع [۵۵] معرفی شد و در مرجع [۵۶] به‌طور دقیق تحلیل شد. در مجموع $۲N$ پیوند را در نظر می‌گیریم که هرکدام دارای انرژی جوزفسون E_{J_j} و ظرفیت خازنی ذاتی C_{J_j} هستند و هر پیوند بین گره‌های j و $j+۱$ قرار دارد. گره‌های j و $N+j$ نیز، برای

$$j \in \{۱, \dots, N\},$$

با یک ظرفیت خازنی دیگر C_j به هم متصل شده‌اند. علاوه بر این، هر گره از طریق یک ظرفیت خازنی C_g به زمین کوپل خازنی دارد؛ این ظرفیت‌ها در شکل نشان داده نشده‌اند.



شکل ۳-۱۳: علاوه بر شاخه‌های نشان‌داده‌شده در این مدار، هر گره از طریق یک ظرفیت خازنی C_g به زمین متصل است. درخت پوشا با رنگ نارنجی نشان داده شده است و فرض می‌شود که از گره زمین، از طریق یک شاخه‌ی خازنی که $\Phi_۱$ را به زمین متصل می‌کند، آغاز می‌شود. جهت‌گیری شاخه‌های موجود در درخت به‌طور صریح نشان داده شده است.

لاگرانژی برابر است با:

(۶۸-۳)

$$\mathcal{L} = \sum_{j=۱}^{N} \frac{C}{۲} \left(\dot{\Phi}_{N+j} - \dot{\Phi}_j\right)^۲ + \sum_{j=۱}^{۲N} \frac{C_g}{۲} \dot{\Phi}_j^۲ + \sum_{j=۱}^{N-۱} \mathcal{L}_{J_j}\left(\Phi_{j+۱} - \Phi_j\right) + \mathcal{L}_{J_N}\left(\Phi_{N+۱} - \Phi_N\right)$$
$$+ \mathcal{L}_{J_{N+۱}}\left(\Phi_{N+۲} - \Phi_{N+۱}\right) + \sum_{j=N+۲}^{۲N-۱} \mathcal{L}_{J_j}\left(\Phi_{j+۱} - \Phi_j\right) + \mathcal{L}_{J_{۲N}}\left(\Phi_۱ - \Phi_{۲N}\right).$$

که در آن تعریف کرده‌ایم:

$$\mathcal{L}_{J_j}(\Phi) := \frac{C_{J_j}}{۲} \dot{\Phi}^۲ + E_{J_j} \cos\left(\frac{۲\pi}{\Phi_۰} \Phi\right). \qquad (۶۹\text{-}۳)$$

هامیلتونی را می‌توان به‌صورت تحلیلی، با وارون کردن ماتریس ظرفیت خازنی متناظر و معرفی بارهای مزدوج

$$Q_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_j},$$

به‌دست آورد، به‌طوری‌که رابطه‌ی جابه‌جایی زیر برقرار باشد:

$$[\hat{\Phi}_i, \hat{Q}_j] = i\hbar\delta_{ij}.$$

اگر این مدار موبیوس با یک ساختار سه‌بعدی پیاده‌سازی شود و تحت یک میدان مغناطیسی خارجی قرار گیرد، باید شار مغناطیسی خارجی $\Phi_{\rm ext}$ را نیز در برخی از حلقه‌ها در نظر گرفت. این سیستم، که نخستین بار در مرجع [۵۵] پیشنهاد شد و در مرجع [۵۶] به‌طور دقیق تحلیل شد، یک ساختار جایگزین برای ساخت کیوبیت محافظت‌شده‌ی (0-π) فراهم می‌کند؛ بخش ۳-۳-۵ را ببینید. به‌طور مشخص، اگر فرض کنیم:

$$E_{J_j} = E_J, \qquad C_{J_j} = C_J \qquad \text{برای همه‌ی } j,$$

آنگاه در رژیمی که:

$$N \gg 1, \qquad E_J \ll E_{C_J}, \qquad C \gg C_J, \qquad C \gg C_g, \tag{۳-۷۰}$$

دو حالت کم‌انرژیِ پایین‌تر وجود دارند که به‌طور قراردادی با

$$|0\rangle \qquad \text{و} \qquad |1\rangle = |\pi\rangle$$

برچسب‌گذاری می‌شوند. این دو حالت به‌صورت نمایی، بر حسب N، هم‌تراز هستند و تابع‌های موج آن‌ها با یکدیگر هم‌پوشانی ندارند. ظهور این هم‌ترازی را می‌توان به‌صورت زیر فهمید. وقتی

$$C \gg C_g,$$

از نظر انرژی مطلوب است که اگر یک جفت کوپر، برای مثال، از گره Φ_{N+1} به گره Φ_{N+2} تونل بزند، هم‌زمان یک جفت کوپر دیگر نیز از گره Φ_1 به گره Φ_2 تونل بزند تا توازن بار روی پله‌های خازنی نردبان حفظ شود. چنین فرایند تونل‌زنیِ دو جفت کوپر، به‌طور مؤثر به‌صورت زیر توصیف می‌شود، و می‌توان آن را به‌صورت اختلالی نیز به‌دست آورد [۵۶، ۵۷]:

$$-E_{J_{\rm eff}} \cos\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}\left(\hat{\Phi}_{N+2} - \hat{\Phi}_{N+1} + \hat{\Phi}_1 - \hat{\Phi}_2\right)\right],$$

که در آن $E_{J_{\rm eff}}$ را می‌توان با نظریه‌ی اختلال تخمین زد. در انتهای دیگر نردبان، به دلیل مرز پیچ‌خورده‌ی نوار موبیوس، جمله‌ی تونل‌زنی مؤثرِ دو جفت کوپر به‌صورت زیر است:

$$-E_{J_{\rm eff}} \cos\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}\left(\hat{\Phi}_1 - \hat{\Phi}_{2N} + \hat{\Phi}_N - \hat{\Phi}_{N+1}\right)\right].$$

همه‌ی این جمله‌های پتانسیل، یعنی یکی برای هر وجه مربعی نوار، با عملگر زیر جابه‌جا می‌شوند:

$$\exp\left(i\frac{\pi}{2e}\sum_i \hat{Q}_i\right).$$

به‌طور خاص، وجه پیچ‌خورده‌ی انتهایی فقط زمانی با عملگر

$$\exp\left(i\frac{\theta}{2e}\sum_i \hat{Q}_i\right)$$

جابه‌جا می‌شود که

$$\theta = \pi.$$

بنابراین هامیلتونی با حاصل‌ضرب این جابه‌جایی‌های π-ای جابه‌جا می‌شود و طیف آن یک هم‌ترازی دوگانه خواهد داشت که بازتاب این تقارن است. در مرجع [۵۷] استدلال شده است که این کیوبیت (π-۰) را می‌توان نمونه‌ای از یک کد روتور هومولوژیک homological rotor code در نظر گرفت؛ کدی که به دلیل جهت‌ناپذیری خمینه‌ی دوبعدی زیربنایی، می‌تواند یک کیوبیت منفرد را کدگذاری کند.

۳-۴ تقارن‌ها و گذارهای ممنوعه

در یک افزاره‌ی ابررسانا، برخی گذارهای انرژی می‌توانند به دلیل تقارن‌ها یا ویژگی‌های هامیلتونی ممنوع شوند؛ درست مانند آنچه در اتم‌ها رخ می‌دهد. در بخش بعدی، مثالی را بررسی می‌کنیم که نشان می‌دهد چگونه این موضوع می‌تواند به هم‌ترازی‌های مفید برای کدگذاری کیوبیت منجر شود. اما در اینجا، چند واقعیت ساده‌ی تقارنی را بیان می‌کنیم که برای کیوبیت‌های پایه‌ای مانند ترنسمون و کیوبیت‌های شار کاربرد دارند. این نکات به ما کمک می‌کنند بفهمیم چگونه باید به این کیوبیت‌ها کوپل شویم و کدام گذارها ممنوع هستند. می‌توان تبدیل یکانی زیر را، یعنی U_π، روی یک مجموعه از متغیرهای مزدوج در نظر گرفت:

$$U_\pi : \qquad \hat{\phi} \mapsto -\hat{\phi}, \qquad \hat{q} \mapsto -\hat{q}. \tag{۳-۷۱}$$

اگر $\hat{\phi}$ و $\hat{q}$ را به‌ترتیب به‌عنوان مکان و تکانه‌ی بی‌بُعد در نظر بگیریم، این تبدیل را می‌توان یک تبدیل پاریته‌ی فضایی دانست؛ در فضای فاز، این تبدیل متناظر با یک چرخش ۱۸۰° است. تبدیل یکانی U_π به‌عنوان عملگر پاریته شناخته می‌شود و می‌توان بررسی کرد که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U_\pi = ie^{-i\frac{\pi}{۲}(\hat{\phi}^۲+\hat{q}^۲)} = e^{-i\pi\hat{a}^\dagger\hat{a}} = (-۱)^{\hat{a}^\dagger\hat{a}}. \tag{۳-۷۲}$$

توجه کنید که U_π نه‌تنها یک تبدیل یکانی است، بلکه هرمیتی نیز هست و رابطه‌ی زیر را ارضا می‌کند:

$$U_\pi^۲ = ,$$

یا به‌طور معادل:

$$U_\pi = U_\pi^\dagger.$$

بنابراین، هامیلتونی‌ای که فقط شامل توابع زوج از $\hat{q}$ و $\hat{\phi}$ باشد، تحت این تبدیل ناوردا است. در نتیجه، حالت‌های ویژه‌ی آن $|\psi_k\rangle$ را می‌توان به‌صورت حالت‌های ویژه‌ی U_π با مقادیر ویژه‌ی ± ۱ انتخاب کرد؛ یعنی حالت‌های ویژه یا پاریته‌ی زوج دارند یا پاریته‌ی فرد. این تقارن باعث می‌شود که برای دو حالت ویژه‌ی $|\psi_k\rangle$ با تقارن یکسان، یعنی هر دو فرد یا هر دو زوج، داشته باشیم:

$$\langle\psi_k|\hat{q}|\psi_l\rangle = \langle\psi_k|U_\pi^\dagger\hat{q}U_\pi|\psi_l\rangle = -\langle\psi_k|\hat{q}|\psi_l\rangle = ۰. \tag{۳-۷۳}$$

به‌طور مشابه، برای حالت‌های ویژه‌ای با تقارن یکسان داریم:

$$\langle\psi_k|\hat{\phi}|\psi_l\rangle = ۰.$$

به‌صورت کلی‌تر:

$$\langle\psi_k|f_{\rm odd}(\hat{\phi})|\psi_l\rangle = ۰, \tag{۳-۷۴}$$

بین حالت‌های ویژه‌ای با تقارن یکسان برقرار است؛ که در آن $f_{\rm odd}(\cdot)$ یک تابع فرد است. هامیلتونی‌هایی که به $\hat{q}^۲$ و یک پتانسیل زوج $U(\phi)$ وابسته‌اند، نسبت به پاریته متقارن هستند. نمونه‌هایی از این نوع هامیلتونی‌ها شامل کیوبیت ترنسمون، کیوبیت شار، و هامیلتونی کیوبیت فلوکسونیوم هستند؛ هر دو در حالت $\phi_{\rm ext} = ۰$ یا π، برای نمونه پتانسیل

شکل ۳-۵ را ببینید. این موضوع نشان می‌دهد که تحریک کیوبیت از طریق «دوقطبی» آن، یعنی کوپل شدن از طریق عملگر $\hat{q}$، فقط به گذارهایی از حالت زوج به فرد و برعکس منجر می‌شود. به دلیل رابطه‌ی (۳-۷۳)، سایر گذارها ممنوع هستند. همین نتیجه زمانی نیز برقرار است که تحریک به‌صورت القایی و از طریق عملگر $\hat{\phi}$ انجام شود. دانستن این نکته زمانی مهم است که بخواهیم چگونگی دستکاری کیوبیت را بررسی کنیم یا عناصر ماتریسی $\hat{\phi}$ و $\hat{q}$ را در پایه‌ی کیوبیتی تخمین بزنیم. برای مثال، برای این کیوبیت‌ها داریم:

$$\langle g|\hat{\phi}|g\rangle = \langle e|\hat{\phi}|e\rangle = \langle g|\hat{q}|g\rangle = \langle e|\hat{q}|e\rangle = ۰.$$

برای عملگر $\hat{q}$ می‌توان ملاحظات بیشتری نیز مطرح کرد، زمانی که هامیلتونی فقط به $\hat{q}^۲$ وابسته باشد؛ حتی اگر پتانسیل نسبت به پاریته متقارن نباشد، یعنی:

$$U(\phi) \neq U(-\phi).$$

از آنجا که در نمایش شار داریم:

$$\hat{q} = -i\frac{d}{d\phi},$$

هر هامیلتونی‌ای که فقط به $\hat{q}^۲$ وابسته باشد، در پایه‌ی شار به‌صورت یک عملگر حقیقی‌مقدار عمل می‌کند. این موضوع نشان می‌دهد که تابع‌های ویژه‌ی $\psi_k(\phi)$ را می‌توان حقیقی انتخاب کرد. اگر $\psi_k(\phi)$ها نرمال‌پذیر باشند، این امر به روابط زیر منجر می‌شود:

$$\langle \psi_k|\hat{q}|\psi_k\rangle = -i\int_{-\infty}^{\infty} d\phi\, \psi_k^*(\phi)\frac{d}{d\phi}\psi_k(\phi) = ۰, \tag{۳-۷۵}$$

و

$$\langle \psi_k|\hat{q}|\psi_l\rangle = -\langle \psi_l|\hat{q}|\psi_k\rangle. \tag{۳-۷۶}$$

این ویژگی از نظر صوری معادل ناوردایی نسبت به وارونگی زمان است. هامیلتونی کیوبیت شار یا کیوبیت فلوکسونیوم در رابطه‌ی(۳-۲۱)، برای شار خارجی دلخواه، نمونه‌ای از این حالت است. این مثال نشان می‌دهد که تحریک از طریق $\hat{q}$، اگر حالت‌های محاسباتی به‌عنوان ترازهای کیوبیتی $\langle ۰|$ و $\langle ۱|$ انتخاب شوند، هیچ مؤلفه‌ی Z ایجاد نمی‌کند. علاوه بر این، مطابق رابطه‌ی (۳-۷۶)، عملگر $\hat{q}$ در کیوبیت متناسب با پائولی Y عمل می‌کند، نه پائولی X.

تمرین ۱.۴.۳ استدلال کنید که چرا برای کیوبیت شار در $\phi_{\text{ext}} = \pi$، که در آن پتانسیل نسبت به ϕ دارای تقارن پاریته است، داریم:

$$\langle ۰|\hat{\phi}|۱\rangle = ۰.$$

در اینجا:

$$|۰\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(|g\rangle + |e\rangle), \qquad |۱\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(|g\rangle - |e\rangle),$$

که $\langle g|$ و $\langle e|$ به‌ترتیب حالت پایه و حالت نخستِ برانگیخته هستند.

پاسخ تمرین ۱.۴.۳ به دلیل تقارن پاریته داریم:

$$\langle g|\hat{\phi}|g\rangle = \langle e|\hat{\phi}|e\rangle = ۰.$$

بنابراین:

$$\langle ۰|\hat{\phi}|۱\rangle = \frac{۱}{۲}\left(-\langle e|\hat{\phi}|g\rangle + \langle g|\hat{\phi}|e\rangle\right) = ۰,$$

زیرا تابع‌های موج $\psi_e(\phi)$ و $\psi_g(\phi)$ حقیقی هستند و داریم $\langle e|\hat{\phi}|g\rangle = \langle g|\hat{\phi}|e\rangle$.

۳-۴-۱ تقارن‌ها: بحثی درباره‌ی یک کیوبیت چهاروجهی

در این بخش، از مثال یک مدار چهاروجهی [۵۸] استفاده می‌کنیم تا زیرفضاهای حفاظت‌شده توسط تقارن را بررسی کنیم. ابتدا پیامدهای تقارن‌های یک هامیلتونی را به‌صورت کلی‌تر مرور می‌کنیم؛ همان‌طور که این مفاهیم در فیزیک کوانتومی اتمی، مولکولی و ماده‌ی چگال به کار می‌روند. به یاد بیاورید که یک نمایش از گروه G، یک همریختی گروهی است که در آن هر عضو g از گروه G به یک ماتریس یا عملگر D_g نگاشته می‌شود، به‌طوری‌که:

$$D_{g_۱g_۲} = D_{g_۱}D_{g_۲}.$$

برای مبانی نظریه‌ی گروه، به مرجع [۵۹] مراجعه کنید. اگر برای یک زیرفضا V داشته باشیم:

$$D_g(V) \subseteq V, \qquad \forall g,$$

یعنی بردارهای موجود در V دوباره به بردارهایی در همان V نگاشته شوند، آنگاه V یک زیرفضای ناوردا نامیده می‌شود. اگر یک نمایش هیچ زیرفضای ناوردای غیر بدیهی نداشته باشد، گفته می‌شود که آن نمایش کاهش‌ناپذیر است. یک تقارن برای هامیلتونی کوانتومی H، نمایشی است که برای همه‌ی gها رابطه‌ی زیر را ارضا کند:

$$[D_g, H] = ۰.$$

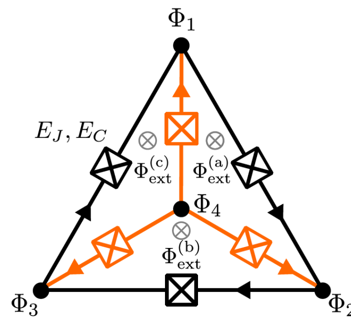
یک پیامد مهم این است که اگر $|\psi\rangle$ یک حالت ویژه‌ی H باشد، یعنی:

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle,$$

آنگاه داریم:

$$H(D_g|\psi\rangle) = D_gH|\psi\rangle = E(D_g|\psi\rangle). \qquad (۳-۷۷)$$

یعنی $D_g|\psi\rangle$، برای هر $g \in G$، نیز یک حالت ویژه است و با $|\psi\rangle$ همتراز خواهد بود. بنابراین هر نمایش گروهی D_g را می‌توان به جمع مستقیم نمایش‌های کاهش‌ناپذیر تجزیه کرد، و زیرفضاهای ناوردای متناظر، زیرفضاهای ویژه‌ی همترازِ هامیلتونی را تشکیل می‌دهند.



شکل ۳-۱۴: یک چهاروجهی تخت‌شده. فرض می‌کنیم همه‌ی پیوندهای جوزفسون دارای E_J و E_C یکسان هستند. درخت پوشای مورد نظر با رنگ نارنجی نشان داده شده است و Φ_iها شارهای گره‌ای هستند؛ فرض می‌کنیم گره $\Phi_۴$ زمین شده است. جهت‌گیری شاخه‌ها به‌طور صریح نشان داده شده است و همه‌ی حلقه‌ها را با جهت‌گیری ساعت‌گرد در نظر می‌گیریم.

در عمل، همترازی طیفیِ مبتنی بر تقارن می‌تواند برای مهندسی کیوبیت‌های «محافظت‌شده» مفید باشد؛ البته با این فرض که نویز با تقارن جابه‌جا نشود. اگر فضای همتراز دوبعدی باشد، می‌توان گفت که این فضا یک کیوبیت را کدگذاری می‌کند، و می‌توان عملگرهای منطقی X و Z را تعریف کرد که روی این کیوبیت عمل می‌کنند. یک جمله‌ی اختلالی در هامیلتونی را در نظر بگیرید که با تقارن جابه‌جا نمی‌شود. چنین جمله‌ای معمولاً حالت‌های موجود

در زیرفضای هم‌تراز را به حالت‌هایی خارج از آن نگاشت می‌کند. در پایین‌ترین مرتبه در نظریه‌ی اختلال، برای مثال رابطه‌ی (۴-۷) در بخش ۴-۷ را ببینید، چنین جمله‌ی «غیرقطری» off-diagonal هم‌ترازی طیف را از بین نمی‌برد. این یعنی خطاهای ناشی از چنین جمله‌ای در این مرتبه سرکوب می‌شوند. در واقع، فقط خطاهایی که بتوانند عملگرهای منطقیِ کیوبیت کدگذاری‌شده را ایجاد کنند، می‌توانند در مرتبه‌ای از نظریه‌ی اختلال باعث شکسته شدن هم‌ترازی شوند. با انتخاب یک کدگذاری که در آن این عملگرهای منطقی به فرایندهای نامحتمل مربوط باشند، مثلاً فرایندهایی که تعداد زیادی درجه‌ی آزادی را تحت تأثیر قرار می‌دهند، این خطاها فقط در مرتبه‌های بالای نظریه‌ی اختلال ظاهر می‌شوند. به این ترتیب، مانند کد توپولوژیک [۵۷، ۶۰]، می‌توان محافظت به‌دست آورد. علاوه بر این، اگر بتوان فرایندهای منطقی را به‌صورت دلخواه فعال کرد، در حالی که محیط نتواند چنین کاری انجام دهد، آنگاه می‌توان در حالی که کیوبیت همچنان محافظت‌شده باقی می‌ماند، روی آن گیت اجرا کرد. در بخش (۲.۳.۷) محافظت در برابر نویز را با جزئیات بیشتری بررسی می‌کنیم.

اکنون به گروه تقارن بازمی‌گردیم. توجه می‌کنیم که اگر زیرفضاهای ناوردا یک‌بعدی باشند، آنگاه:

$$D_g|\psi\rangle \propto |\psi\rangle$$

و هیچ هم‌ترازی‌ای وجود ندارد. بنابراین، برای یافتن یک زیرفضای محافظت‌شده توسط تقارن که بتواند یک کیوبیت یا یک کیودیت qudit را در خود جای دهد، لازم است که گروه دست‌کم یک نمایش کاهش‌ناپذیر دوبعدی داشته باشد. اگر گروه تقارن آبلی باشد، یعنی همه‌ی اعضای گروه با هم جابه‌جا شوند، آنگاه همه‌ی نمایش‌های کاهش‌ناپذیر یک‌بعدی هستند؛ بنابراین هیچ کیوبیت محافظت‌شده‌ای یافت نمی‌شود. توجه کنید که در نظریه‌ی تصحیح خطای کوانتومی پایدارساز stabilizer quantum error correction، یک نمونه از گروه ناآبلی G، متمرکزساز centralizer گروه پایدارساز است که توسط گروه پایدارساز آبلی، به‌همراه عملگرهای منطقیِ ناجابه‌جا شونده‌ی کیوبیت‌های کدگذاری‌شده، تولید می‌شود [۶۱].

اگر هامیلتونی مدار الکتریکی دارای یک تقارن ناآبلی باشد، مانند گروه تقارن فضاییِ یک چهاروجهی سه‌بعدی، آنگاه وجود یک زیرفضای هم‌تراز با بُعد بزرگ‌تر از یک امکان‌پذیر است. به‌طور کلی‌تر، می‌توان هامیلتونی‌های مدارهای الکتریکی‌ای را تصور کرد که گروه تقارنِ، مثلاً، چندوجهی‌های سه‌بعدی یا سطح‌های هذلولوی را دارند. البته ممکن است در عمل یافتن مدارهای الکتریکی‌ای آسان‌تر باشد که فقط تقریباً دارای چنین تقارنی هستند؛ یعنی پارامترها طوری انتخاب شوند که برخی جمله‌ها قابل صرف‌نظر کردن باشند یا برخی درجات آزادی حذف شوند تا یک هامیلتونی مؤثر با تقارن هدف به‌دست آید.

اکنون یک چهاروجهی را در نظر می‌گیریم که روی هر یال آن یک پیوند جوزفسون قرار دارد و همه‌ی پیوندها دارای E_J و E_C یکسان هستند؛ نمایش تخت‌شده‌ی این چهاروجهی در شکل (۱۴.۳) نشان داده شده است. در غیاب میدان‌های مغناطیسی خارجی، مدار الکتریکی به دلیل برابر بودن همه‌ی عناصر شاخه‌ای، دارای تقارن چهاروجهی است. اما اگر این ساختار واقعاً یک چهاروجهی سه‌بعدی باشد و میدان‌های مغناطیسی خارجی نیز حضور داشته باشند، آنگاه شار خالص عبوری از چهاروجهی باید به دلیل معادله‌ی ماکسول

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = ۰$$

صفر باشد. این یعنی اگر شار از برخی وجه‌ها مثبت باشد، باید از دست‌کم یک وجه دیگر منفی باشد. در نتیجه، در حضور میدان‌های مغناطیسی خارجی، تقارن چهاروجهی معمولاً شکسته می‌شود؛ زیرا همه‌ی وجه‌ها نمی‌توانند توسط شار یکسانی سوراخ شوند. با این حال، توجه کنید که اگر شار عبوری برابر با نصف کوانتوم شار باشد، این موضوع درست نیست؛ زیرا

$$\phi_{\text{ext}} = \pm\pi$$

سهم یکسانی در هامیلتونی ایجاد می‌کند.

علاوه بر این، در غیاب میدان‌های مغناطیسی، اگر یکی از گره‌های شار زمین شود، تقارن کامل چهاروجهی را نیز از دست می‌دهیم. همان‌طور که خواهیم دید، با زمین کردن یک گره، تعداد درجات آزادی فقط سه عدد می‌شود و گروه تقارن لاگرانژی کاهش می‌یابد. می‌توان مداری را نیز در نظر گرفت که در آن یک گره زمین اضافی وجود دارد و هر یک از چهار گره از طریق یک ظرفیت خازنی C_g به آن گره زمین کوپل شده است. در این حالت، بدون شارهای خارجی یا در

$$\phi_{\text{ext}} = \pm\pi,$$

لاگرانژی و هامیلتونی دارای تقارن چهاروجهی خواهند بود.
در اینجا خود را به حالتی محدود می‌کنیم که یک گره زمین شده است، مثلاً:

$$\Phi_۴ = ۰.$$

در این صورت می‌توان فقط یک چهاروجهی فروپاشیده روی قاعده‌اش را در نظر گرفت، مانند شکل۳-۱۴. داشتن ساختاری دوبعدی، پیاده‌سازی تجربی را نیز امکان‌پذیرتر می‌کند. شارهای خارجی در شکل (۱۴.۳) صرفاً صفحه را سوراخ می‌کنند و، برای تقارن، قرار می‌دهیم:

$$\Phi_{\text{ext}}^{(a)} = \Phi_{\text{ext}}^{(b)} = \Phi_{\text{ext}}^{(c)} = \Phi_{\text{ext}}.$$

بیایید هامیلتونی این ساختار را به‌طور صریح استخراج کنیم. در استخراج، ابتدا $\Phi_۴$ را به‌صورت صریح در لاگرانژی وارد می‌کنیم و سپس آن را صفر قرار می‌دهیم. با توجه به انتخاب درخت پوشا در شکل ۳-۱۴، شرط‌های حلقه با شارهای خارجی، مطابق رابطه‌ی (۲-۵۱)، عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned}
\Phi_{b=(۴,۱)} + \Phi_{b=(۱,۲)} - \Phi_{b=(۴,۲)} &= \Phi_{\text{ext}}^{(a)},\\
\Phi_{b=(۴,۲)} + \Phi_{b=(۲,۳)} - \Phi_{b=(۴,۳)} &= \Phi_{\text{ext}}^{(b)},\\
\Phi_{b=(۴,۳)} + \Phi_{b=(۳,۱)} - \Phi_{b=(۴,۱)} &= \Phi_{\text{ext}}^{(c)}.
\end{aligned} \tag{۳-۷۸}$$

برای شاخه‌های موجود در درخت پوشا، از تعریف زیر استفاده می‌کنیم:

$$\Phi_{b=(j,k)} = \Phi_k - \Phi_j,$$

همان‌طور که در رابطه‌ی (۲-۵۳) آمده است. در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}
\Phi_{b=(۱,۲)} &= \Phi_۲ - \Phi_۱ + \Phi_{\text{ext}}^{(a)},\\
\Phi_{b=(۲,۳)} &= \Phi_۳ - \Phi_۲ + \Phi_{\text{ext}}^{(b)},\\
\Phi_{b=(۳,۱)} &= \Phi_۱ - \Phi_۳ + \Phi_{\text{ext}}^{(c)}.
\end{aligned} \tag{۳-۷۹}$$

با فرض

$$\Phi_{\text{ext}}^{(a)} = \Phi_{\text{ext}}^{(b)} = \Phi_{\text{ext}}^{(c)} = \Phi_{\text{ext}},$$

لاگرانژی برابر است با:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = &\mathcal{L}_J(\Phi_۱ - \Phi_۴) + \mathcal{L}_J(\Phi_۲ - \Phi_۴) + \mathcal{L}_J(\Phi_۳ - \Phi_۴)\\
&+ \mathcal{L}_J(\Phi_۲ - \Phi_۱ + \Phi_{\text{ext}}) + \mathcal{L}_J(\Phi_۳ - \Phi_۲ + \Phi_{\text{ext}}) + \mathcal{L}_J(\Phi_۱ - \Phi_۳ + \Phi_{\text{ext}}),
\end{aligned} \tag{۳-۸۰}$$

که در آن تعریف کرده‌ایم:

$$\mathcal{L}_J(\Phi) := \frac{C_J}{۲}\dot{\Phi}^۲ + E_J \cos\left(\frac{۲\pi}{\Phi_۰}\Phi\right). \tag{۳-۸۱}$$

در ادامه همچنین فرض می‌کنیم که:

$$\dot{\Phi}_{\text{ext}} = ۰$$

و قرار می‌دهیم:

$$\Phi_۴ = ۰.$$

این یعنی فقط سه درجه‌ی آزادی واقعی وجود دارد، و گروه تقارن لاگرانژی $S_۳$ است؛ یعنی گروه جایگشت سه عنصر. به‌طور خاص، به‌سادگی می‌توان دید که $\mathcal{L}$ برای

$$\Phi_{\text{ext}} \neq ۰, \qquad \Phi_۴ = ۰,$$

تحت جایگشت‌های سه شار گره‌ای ناورداست، به شرط آنکه به جایگشت‌های فرد یک علامت منفی اضافه کنیم. برای مثال، تبدیل زیر:

$$\Phi_۱ \mapsto -\Phi_۲, \qquad \Phi_۲ \mapsto -\Phi_۱, \qquad \Phi_۳ \mapsto -\Phi_۳, \tag{۳-۸۲}$$

متناظر با یک جایگشت علامت‌دارِ گره‌های ۱ و ۲ است.

هامیلتونی کلاسیکی بر حسب متغیرهای بی‌بُعد ϕ_j و q_j، که مانند رابطه‌ی (۲-۱۸) تعریف شده‌اند، با وارون کردن ماتریس ظرفیت خازنی به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = {}& ۲E_{C_J}\left(q_۱^۲ + q_۲^۲ + q_۳^۲ + q_۱q_۲ + q_۲q_۳ + q_۳q_۱\right) \\ & - E_J\Big[\cos\phi_۱ + \cos\phi_۲ + \cos\phi_۳ + \cos(\phi_۲ - \phi_۱ + \phi_{\text{ext}}) \\ & \qquad + \cos(\phi_۳ - \phi_۲ + \phi_{\text{ext}}) + \cos(\phi_۱ - \phi_۳ + \phi_{\text{ext}})\Big]. \end{aligned} \tag{۳-۸۳}$$

هامیلتونی کلاسیکی $\mathcal{H}$ را می‌توان با اعمال روابط جابه‌جایی استاندارد، به هامیلتونی کوانتومی H کوانتیزه کرد.

زیرفضاهای ویژه‌ی هم‌تراز و نمایش‌های کاهش‌ناپذیر گروه $S_۳$ شش عضو دارد؛ یعنی عضو همانی e، جابه‌جایی‌های دوتایی (۱۲)، (۲۳)، (۳۱)، و جایگشت‌های چرخه‌ای (۱۲۳) و (۱۳۲). علاوه بر این، این گروه ناآبلی است؛ زیرا برای مثال:

$$(۱۲)(۲۳) \neq (۲۳)(۱۲).$$

این تقارن را در پایه‌ی شار بررسی می‌کنیم. ابتدا هر حالت را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^۳} d\phi_۱ d\phi_۲ d\phi_۳ \, \psi(\phi_۱, \phi_۲, \phi_۳)|\phi_۱, \phi_۲, \phi_۳\rangle.$$

می‌خواهیم ویژگی‌های تابع‌های ویژه

$$\psi(\phi_۱, \phi_۲, \phi_۳) \in \ell^۲(\mathbb{R}^۳)$$

را پیدا کنیم که صرفاً از تقارن ناشی می‌شوند. هامیلتونی H به‌وضوح تحت تبدیل‌های علامت‌دار D_σ، برای هر جایگشت $\sigma \in S_۳$ روی سه فضا، ناورداست. به‌طور دقیق‌تر، عمل اعضای گروه D_σ به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} |\phi_۱, \phi_۲, \phi_۳\rangle &\xmapsto{D_e} |\phi_۱, \phi_۲, \phi_۳\rangle, \\ |\phi_۱, \phi_۲, \phi_۳\rangle &\xmapsto{D_{(۱۲)}} |-\phi_۲, -\phi_۱, -\phi_۳\rangle, \\ |\phi_۱, \phi_۲, \phi_۳\rangle &\xmapsto{D_{(۲۳)}} |-\phi_۱, -\phi_۳, -\phi_۲\rangle, \\ |\phi_۱, \phi_۲, \phi_۳\rangle &\xmapsto{D_{(۳۱)}} |-\phi_۳, -\phi_۲, -\phi_۱\rangle, \\ |\phi_۱, \phi_۲, \phi_۳\rangle &\xmapsto{D_{(۱۲۳)}} |\phi_۲, \phi_۳, \phi_۱\rangle, \\ |\phi_۱, \phi_۲, \phi_۳\rangle &\xmapsto{D_{(۱۳۲)}} |\phi_۳, \phi_۱, \phi_۲\rangle. \end{aligned} \tag{۳-۸۴}$$

توجه می‌کنیم که برای مقادیر خاصی از $(\phi_۱, \phi_۲, \phi_۳)$، مثلاً اگر $\phi_i = ۰$ یا $\phi_i = \phi_j$، برخی از حالت‌های پایه در رابطه‌ی (۳-۸۴) ممکن است از یکدیگر متمایز نباشند. این موضوع پشتیبان تابع‌های ویژه‌ی یافت‌شده را محدود

می‌کند؛ یعنی تابع‌های موج دارای صفرها یا «گره‌ها» خواهند بود. در اینجا این تحلیل را دنبال نمی‌کنیم، بلکه پیامدهای عمل گروه روی حالت‌های پایه $|\phi_۱, \phi_۲, \phi_۳\rangle$ را برای مکان‌های عمومی $(\phi_۱, \phi_۲, \phi_۳)$ بررسی می‌کنیم و در پایان تحلیل به این مسئله باز می‌گردیم.

هر جابه‌جایی علامت‌دار در رابطه‌ی (۳-۸۴) را می‌توان به‌صورت اعمال عملگر پاریته $U_\pi^{\otimes ۳}$ در رابطه‌ی(۳-۶۳) روی سه فضا، و سپس اعمال جابه‌جایی یک جفت از فضاها در نظر گرفت. برای هر انتخاب از $(\phi_۱, \phi_۲, \phi_۳)$، و تحت فرض‌های

$$\phi_i \neq ۰, \qquad \phi_i \neq \pm\phi_j,$$

شش بردار در رابطه‌ی (۳-۸۴) یک فضای شش‌بعدی را تعیین می‌کنند. این نمایش شش‌بعدی، یعنی نمایش منظم regular representation، یک بار نمایش بدیهی یک‌بعدی، یک بار نمایش علامت یک‌بعدی، و دو بار نمایش کاهش‌ناپذیر دوبعدی $S_۳$ را شامل می‌شود. بنابراین در مجموع:

$$۲ + ۲ + ۱ + ۱ = ۶.$$

این ویژگیِ نمایش منظم است؛ برای نمونه صفحه‌ی ۱۰۷ در مرجع [۶۲] را ببینید. این بدان معناست که می‌توان حالت‌های ویژه و زیرفضاهای ویژه‌ی هم‌تراز را با این چهار نمایش کاهش‌ناپذیر ممکن برچسب‌گذاری کرد.

برای مثال، حالت‌های ویژه‌ای که متناظر با نمایش کاهش‌ناپذیر بدیهی هستند، یعنی هر عضو گروه مانند همانی عمل می‌کند، به‌صورت زیرند:

$$|\psi^{(S)}\rangle = \int_{\mathbb{R}^۳} d\phi_۱ d\phi_۲ d\phi_۳ \, \psi_{\text{sym}}(\phi_۱, \phi_۲, \phi_۳)|\phi_۱, \phi_۲, \phi_۳\rangle. \qquad (۳\text{-}۸۵)$$

از آنجا که برای همه‌ی σها داریم:

$$D_\sigma|\psi^{(S)}\rangle = |\psi^{(S)}\rangle,$$

پس:

$$\psi_{\text{sym}}(\phi_۱, \phi_۲, \phi_۳) = \psi_{\text{sym}}\left(D_\sigma(\phi_۱, \phi_۲, \phi_۳)\right), \qquad \forall\sigma.$$

نمایش کاهش‌ناپذیر یک‌بعدی دیگر، برای جایگشت‌های فرد σ ضریب (-۱) و برای جایگشت‌های زوج ضریب $(+۱)$ اعمال می‌کند و متناظر با بردارهای ویژه‌ای از شکل زیر است:

$$|\psi^{(AS)}\rangle = \int_{\mathbb{R}^۳} d\phi_۱ d\phi_۲ d\phi_۳ \, \psi_{\text{asym}}(\phi_۱, \phi_۲, \phi_۳)|\phi_۱, \phi_۲, \phi_۳\rangle,$$

که در آن:

$$\psi_{\text{asym}}(\phi_۱, \phi_۲, \phi_۳) = \text{sign}(\sigma)\psi_{\text{asym}}\left(D_\sigma(\phi_۱, \phi_۲, \phi_۳)\right), \qquad \forall\sigma \in S_۳.$$

به‌طور جایگزین، این حالت را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}|\psi^{(AS)}\rangle = \int_{\mathbb{R}^۳} d\phi_۱ d\phi_۲ d\phi_۳ \, \chi(\phi_۱, \phi_۲, \phi_۳)\Big(&|\phi_۱, \phi_۲, \phi_۳\rangle - |-\phi_۱, -\phi_۳, -\phi_۲\rangle \\ &- |-\phi_۲, -\phi_۱, -\phi_۳\rangle - |-\phi_۳, -\phi_۲, -\phi_۱\rangle + |\phi_۳, \phi_۱, \phi_۲\rangle + |\phi_۲, \phi_۳, \phi_۱\rangle\Big),\end{aligned} \qquad (۳\text{-}۸۶)$$

که در آن تابع موج $\chi(\phi_۱, \phi_۲, \phi_۳)$ همچنان کاملاً آزاد است. از آنجا که فضای حالت H بی‌نهایت‌بعدی است، برای هر بخشی که با یک نمایش کاهش‌ناپذیر برچسب‌گذاری می‌شود، انتظار تعداد بی‌نهایتی مقدار ویژه و تابع ویژه، مانند $\chi(\phi_۱, \phi_۲, \phi_۳)$، وجود دارد.

تمرین ۲.۴.۳ بررسی کنید که:

$$D_\sigma|\psi^{(AS)}\rangle = \mathrm{sign}(\sigma)|\psi^{(AS)}\rangle$$

برای $|\psi^{(AS)}\rangle$ مانند رابطه‌ی (۳-۸۶) برقرار است. حالت $|\psi^{(S)}\rangle$ در رابطه‌ی (۳-۸۵) را نیز به روشی مشابه رابطه‌ی (۳-۸۶) بسط دهید، با استفاده از این شرط که:

$$D_\sigma|\psi^{(S)}\rangle = |\psi^{(S)}\rangle, \qquad \forall\sigma.$$

به‌طور صریح نشان دهید که:

$$\langle\psi^{(S)}|\psi^{(AS)}\rangle = ۰,$$

با استفاده از این واقعیت که این حالت‌ها تحت برخی از D_σها به‌صورت متفاوت تبدیل می‌شوند.

پاسخ تمرین ۲.۴.۳ می‌توان بررسی کرد که:

$$D_{\sigma=(۱۲)}|\psi^{(AS)}\rangle = -|\psi^{(AS)}\rangle,$$

و به همین ترتیب برای سایر جایگشت‌های فرد. داریم:

$$\begin{aligned}|\psi^{(S)}\rangle = \int_{\mathbb{R}^۳} d\phi_۱ d\phi_۲ d\phi_۳\, \tilde{\chi}(\phi_۱,\phi_۲,\phi_۳)\Big(&|\phi_۱,\phi_۲,\phi_۳\rangle + |\phi_۳,\phi_۱,\phi_۲\rangle + |\phi_۲,\phi_۳,\phi_۱\rangle\\ &+ |-\phi_۱,-\phi_۳,-\phi_۲\rangle + |-\phi_۲,-\phi_۱,-\phi_۳\rangle + |-\phi_۳,-\phi_۲,-\phi_۱\rangle\Big),\end{aligned} \tag{۳-۸۷}$$

که در آن $\tilde{\chi}(\phi_۱,\phi_۲,\phi_۳)$ همچنان آزاد است. به‌سادگی می‌توان دید که زیرفضاهایی که با نمایش‌های کاهش‌ناپذیر برچسب‌گذاری شده‌اند، متعامد هستند، زیرا برای جایگشت‌های فرد σ داریم:

$$\langle\psi^{(S)}|\psi^{(AS)}\rangle = \langle\psi^{(S)}|D_\sigma|\psi^{(AS)}\rangle = -\langle\psi^{(S)}|\psi^{(AS)}\rangle = ۰.$$

دو نمایش کاهش‌ناپذیر دوبعدی را با $k = ۱, ۲$ برچسب‌گذاری می‌کنیم. بیایید این نمایش‌ها را بسازیم. یک بردار را به‌صورت زیر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}|\psi_۱^{(k=۱)}\rangle \propto \int_{\mathbb{R}^۳} d\phi_۱ d\phi_۲ d\phi_۳\, \chi'(\phi_۱,\phi_۲,\phi_۳)\Big(&|\phi_۱,\phi_۲,\phi_۳\rangle - |-\phi_۱,-\phi_۳,-\phi_۲\rangle\\ &+ |-\phi_۲,-\phi_۱,-\phi_۳\rangle - |\phi_۲,\phi_۳,\phi_۱\rangle\Big).\end{aligned} \tag{۳-۸۸}$$

این بردار نسبت به $|\psi^{(S)}\rangle$ و $|\psi^{(AS)}\rangle$ متعامد است، با این فرض که $\chi(\phi_۱,\phi_۲,\phi_۳)$، $\chi'(\phi_۱,\phi_۲,\phi_۳)$ و مانند آن‌ها به‌گونه‌ای باشند که همه‌ی حالت‌هایی که روی آن‌ها انتگرال می‌گیریم، برای مقادیر متفاوت $(\phi_۱,\phi_۲,\phi_۳)$ متعامد باشند. با اعمال $D_{(۱۳)}$ به این بردار، به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}D_{(۱۳)}|\psi_۱^{(k=۱)}\rangle \propto \int_{\mathbb{R}^۳} d\phi_۱ d\phi_۲ d\phi_۳\, \chi'(\phi_۱,\phi_۲,\phi_۳)\Big(&|-\phi_۳,-\phi_۲,-\phi_۱\rangle - |\phi_۲,\phi_۳,\phi_۱\rangle\\ &+ |\phi_۳,\phi_۱,\phi_۲\rangle - |-\phi_۱,-\phi_۳,-\phi_۲\rangle\Big),\end{aligned} \tag{۳-۸۹}$$

که نسبت به $|\psi_۱^{(k=۱)}\rangle$ متعامد نیست. اما می‌توان با روش گرم-اشمیت Gram-Schmidt آن را متعامدسازی کرد و بردار متعامدی به‌دست آورد که شریک $|\psi_۱^{(k=۱)}\rangle$ در نمایش کاهش‌ناپذیر دوبعدی است:

$$\begin{aligned}|\psi_۲^{(k=۱)}\rangle \propto \int_{\mathbb{R}^۳} d\phi_۱ d\phi_۲ d\phi_۳\, \chi'(\phi_۱,\phi_۲,\phi_۳)\Big(&|\phi_۱,\phi_۲,\phi_۳\rangle + |-\phi_۱,-\phi_۳,-\phi_۲\rangle\\ &+ |-\phi_۲,-\phi_۱,-\phi_۳\rangle - ۲|-\phi_۳,-\phi_۲,-\phi_۱\rangle - ۲|\phi_۳,\phi_۱,\phi_۲\rangle + |\phi_۲,\phi_۳,\phi_۱\rangle\Big).\end{aligned} \tag{۳-۹۰}$$

تمرین ۳.۴.۳ در زبان ساده‌شده‌ی سه حالت کیوتریت qutrit، که در اینجا قابل استفاده است، تعامد دو حالت زیر را بررسی کنید:

$$|a\rangle = |۱۲۳\rangle - |۱۳۲\rangle + |۲۱۳\rangle - |۲۳۱\rangle,$$

و

$$|b\rangle = |۱۲۳\rangle + |۱۳۲\rangle + |۲۱۳\rangle - ۲|۳۲۱\rangle - ۲|۳۱۲\rangle + |۲۳۱\rangle.$$

همچنین تعامد هر دو حالت $\langle a|$ و $\langle b|$ را با حالت‌های زیر بررسی کنید:

$$|S\rangle = |۱۲۳\rangle + |۳۱۲\rangle + |۲۳۱\rangle + |۱۳۲\rangle + |۲۱۳\rangle + |۳۲۱\rangle,$$

و

$$|AS\rangle = |۱۲۳\rangle + |۳۱۲\rangle + |۲۳۱\rangle - |۱۳۲\rangle - |۲۱۳\rangle - |۳۲۱\rangle.$$

بررسی کنید که:

$$(۱۳)|a\rangle = |۳۲۱\rangle - |۲۳۱\rangle + |۳۱۲\rangle - |۱۳۲\rangle$$

در فضای پوشیده‌شده توسط $\langle a|$ و $\langle b|$ قرار دارد.

پاسخ تمرین ۳.۴.۳ از نرم‌افزار Mathematica، MATLAB یا Python استفاده کنید تا بردارها را به‌صورت بردارهای شش‌بعدی نمایش دهید و روابط تعامد را بررسی کنید.

برای ساخت توابع پایه‌ی آخرین نمایش کاهش‌ناپذیر دوبعدی، از برداری آغاز می‌کنیم که نسبت به همه‌ی بردارهای قبلی

$$|\psi^{(k=۱)}_{۱,۲}\rangle, \qquad |\psi^{(S)}\rangle, \qquad |\psi^{(AS)}\rangle$$

متعامد باشد. با استفاده از ریاضیات ساده، مانند تمرین؟؟ ، می‌توان تعامد را نمایش داد. توجه کنید که علامت‌های $\pm$ در حالت‌هایی مانند $|\pm\phi_۱,\pm\phi_۲,\pm\phi_۳\rangle$ در این روابط تعامدی نقشی ندارند؛ زیرا فقط با زوج یا فرد بودن جایگشت از حالت $|\phi_۱,\phi_۲,\phi_۳\rangle$ تعیین می‌شوند. بنابراین می‌توانیم بگیریم:

$$|\psi^{(k=۲)}_۱\rangle \propto \int_{\mathbb{R}^۳} d\phi_۱ d\phi_۲ d\phi_۳\, \chi''(\phi_۱,\phi_۲,\phi_۳)\Big(|\phi_۱,\phi_۲,\phi_۳\rangle - |-\phi_۲,-\phi_۱,-\phi_۳\rangle + |-\phi_۳,-\phi_۲,-\phi_۱\rangle - |\phi_۳,\phi_۱,\phi_۲\rangle\Big), \tag{۳-۹۱}$$

و شریک آن، که با روش گرم–اشمیت متعامدسازی شده است، برابر است با:

$$|\psi^{(k=۲)}_۲\rangle \propto \int_{\mathbb{R}^۳} d\phi_۱ d\phi_۲ d\phi_۳\, \chi'''(\phi_۱,\phi_۲,\phi_۳)\Big(|\phi_۱,\phi_۲,\phi_۳\rangle - ۲|-\phi_۱,-\phi_۳,-\phi_۲\rangle - |-\phi_۲,-\phi_۱,-\phi_۳\rangle - |-\phi_۳,-\phi_۲,-\phi_۱\rangle + |\phi_۳,\phi_۱,\phi_۲\rangle + ۲|\phi_۲,\phi_۳,\phi_۱\rangle\Big). \tag{۳-۹۲}$$

در استخراج همه‌ی زیرفضاهای ناوردا و بردارهای پایه‌ی آن‌ها، فرض کردیم که تابع موج فقط روی حالت‌هایی $|\phi_۱,\phi_۲,\phi_۳\rangle$ پشتیبان دارد که تحت عمل گروه دچار هیچ ابهام یا غیرقابل‌تمایز شدنی نمی‌شوند. اما اگر $\chi(\phi_۱,\phi_۲,\phi_۳)$ فقط روی حالت‌هایی پشتیبان داشته باشد که مثلاً $\phi_۱ = \phi_۲ = \phi_۳$ برقرار است، چه اتفاقی می‌افتد؟ این یعنی عمل D_σ در رابطه‌ی (۳-۸۴) فقط یک نمایش دوبعدی است که از نمایش بدیهی و نمایش علامت تشکیل شده است. در نتیجه می‌توان دید که بردارهای دیگر $|\psi^{(k)}_{۱,۲}\rangle$ به بردارهای صفر تبدیل می‌شوند و به‌عنوان حالت‌های ویژه‌ی ممکن حذف می‌گردند.

اگر بخواهیم این مدار را بیشتر تحلیل کنیم، می‌توانیم روی این چهار بخش تقارنی مختلف تمرکز کنیم و هامیلتونی را روی این فضاها تصویر کنیم تا تابع‌های موجی مانند $\chi(\psi_۱,\psi_۲,\psi_۳)$ و مانند آن را حل کنیم. یک نقطه‌ی کاری جالب برای اجرای این تحلیل می‌تواند $\phi_{\text{ext}} = \pi$ در هامیلتونی رابطه‌ی (۳-۸۳) باشد، که در آن پتانسیل دارای مجموعه‌ای پیوسته از کمینه‌ها است [۵۸]:

$$\phi_۱ = ۰, \qquad \phi_۲ - \phi_۳ = \pi, \qquad \phi_۳ \text{ دلخواه}. \tag{۳-۹۳}$$

مطالعات بیشتر درباره‌ی هامیلتونی چهاروجهی را می‌توان در مرجع [۵۸] یافت.

فصل ۴

کیوبیت ترنسمون، رزوناتورها و کوپلینگ آن‌ها

در این فصل، کیوبیت ترنسمون را به‌صورت دقیق بررسی می‌کنیم و روش ریاضی توصیف رزوناتورهایی را که می‌توانند به آن کوپل شوند، مورد بحث قرار می‌دهیم. در زمان نگارش این متن، کیوبیت ترنسمون را می‌توان موفق‌ترین کیوبیت ابررسانا دانست. در واقع، تمام تراشه‌های ابررسانای چندکیوبیتی، مثلاً بین ۱۰ تا ۱۰۰۰ کیوبیت، که در حال حاضر مورد استفاده قرار می‌گیرند، از کیوبیت‌های ترنسمون بهره می‌برند. کیوبیت ترنسمون از یک خازن بزرگ تشکیل شده است که یک پیوند ژوزفسون منفرد، در ترنسمون با فرکانس ثابت، یا یک SQUID، در ترنسمون قابل‌تنظیم با شار، را شنت می‌کند؛ همان‌طور که در شکل ۴-۱ نشان داده شده است. بنابراین، از دیدگاه نظریه مدار، ترنسمون اساساً یک CPB است، همان‌گونه که در بخش ۲-۲-۲ توصیف شد، اما در یک رژیم پارامتری خاص کار می‌کند.

ترنسمون‌ها را اتم‌های مصنوعی نیز نامیده‌اند، زیرا این مدار تا حدی مانند یک اتم با حالت‌های الکترونی عمل می‌کند؛ حالت‌هایی که از طریق دوقطبی الکتریکی با میدان الکترومغناطیسی کوپل می‌شوند. این میدان می‌تواند مثلاً در یک رزوناتور ذخیره شده باشد. مزیت ترنسمون در مقایسه با برهم‌کنش‌های واقعی اتم–نور، مانند cavity QED، این است که در circuit QED این کوپلینگ را می‌توان به‌گونه‌ای مهندسی کرد که بسیار قوی باشد. شدت کوپلینگ

$$\frac{g}{2\pi}$$

در مدل جینز–کامینگز تعمیم‌یافته، معادله (۴-۱۳۲)، معمولاً از مرتبه‌ی

$$100\ \mathrm{MHz}$$

است. بنابراین، برای یک کیوبیت ترنسمون با فرکانس معمول

$$5\ \mathrm{GHz},$$

داریم

$$\frac{g}{\omega} = 0{,}02.$$

نکته‌ی مهم برای عملیات درهم‌تنیدگی این است که این کوپلینگ همچنین بسیار قوی‌تر از نرخ‌های واپاشی ترنسمون و رزوناتور است. این نرخ‌ها معمولاً کمتر از

$$\frac{1}{10\ \mu\mathrm{s}} = 10^{-1}\ \mathrm{MHz}$$

هستند؛ یعنی سیستم در رژیم کوپلینگ قوی قرار دارد.

موفقیت شایان توجه ترنسمون عمدتاً به دلایل زیر است:

- سادگی مدار آن، که همراه با روش‌های ساخت قابل‌اعتماد و به‌خوبی تثبیت‌شده به‌دست می‌آید.

- پایداری در برابر نویز بار و نویز شار، که منجر به زمان‌های واپاشی نسبتاً طولانی

$$T_۱$$

می‌شود. این زمان‌ها بسته به ویژگی‌های ماده، از حدود

$$۱۰ - ۱۰۰ \ \mu s$$

یا حتی بیشتر تغییر می‌کنند. همچنین ترنسمون دارای زمان‌های واهمدوسی

$$T_۲$$

مناسبی است.

- امکان انجام گیت‌های تک‌کیوبیتی و دوکیوبیتی، و همچنین انجام اندازه‌گیری‌ها با پروتکل‌هایی نسبتاً ساده.

در ادامه، روش‌های تحلیلی و عددی رایج برای مطالعه‌ی کیوبیت‌های ترنسمون را معرفی می‌کنیم. ابتدا با بررسی هامیلتونی آن و طیف متناظر با آن شروع می‌کنیم.

۴-۱ هامیلتونی CPB و طیف آن

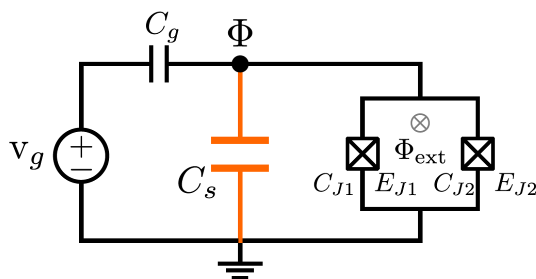
ما مدار یک ترانسمون قابل‌تنظیم با شار را که در شکل ۴-۱ نشان داده شده است، در حالت کلی در نظر می‌گیریم؛ حالتی که در آن انرژی‌های جوزفسون دو اتصال SQUID لزوماً با هم برابر نیستند و ممکن است مقداری عدم‌تقارن وجود داشته باشد. این موضوع در عمل تقریباً همیشه به دلیل نادقتی‌های فرایند ساخت رخ می‌دهد و باعث ایجاد عدم‌قطعیت در E_J می‌شود. با این حال، خواهیم دید که شکل اساسی هامیلتونی تغییر نخواهد کرد.

با استفاده از درخت پوشای مشخص‌شده با رنگ نارنجی در شکل ۴-۱، لاگرانژی مدار به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

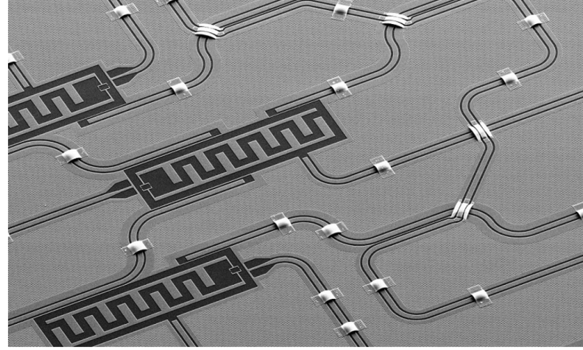
$$\mathcal{L} = \frac{\tilde{C}}{۲}\dot{\Phi}^۲ + \frac{C_g}{۲}\left(\dot{\Phi} - v_g\right)^۲ + E_{J۱}\cos\left(\frac{۲\pi}{\Phi_۰}\Phi\right) + E_{J۲}\cos\left(\frac{۲\pi}{\Phi_۰}\left(\Phi - \Phi_{\text{ext}}\right)\right). \qquad (۴-۱)$$

در این رابطه، $\tilde{C}$ ظرفیت شنت کل است و داریم:

$$\tilde{C} = C_g + C_{J۱} + C_{J۲}.$$



شکل ۴-۱: مدار یک ترانسمون قابل‌تنظیم با شار. منبع ولتاژ، اثر نویز بار یا یک ولتاژ خارجیِ اعمال‌شده، مثلاً از طریق یک خط انتقال، را مدل می‌کند. درخت پوشای انتخاب‌شدهٔ ما با رنگ نارنجی مشخص شده است.



شکل ۴-۲: پردازنده‌ای از آزمایشگاه DiCarlo در دانشگاه فناوری دلفت، سال ۲۰۱۶، شامل سه کیوبیت ترانسمون که هرکدام دارای یک خازن انگشتی interdigitated capacitor برای ایجاد ظرفیت شنت بزرگ هستند و به‌صورت موازی با یک SQUID بسیار کوچک قرار گرفته‌اند. در تصویر می‌توان کوپلینگ خازنی به رزوناتورهای هم‌صفحه‌ای، خطوط انتقال، و خطوط شار در کنار SQUID را مشاهده کرد. همچنین پل‌های هوایی airbridges یا «باندیج‌ها» برای ایجاد اتصال مناسب در صفحهٔ زمین، و نیز گذرگاه‌هایی cross-overs برای عبور خطوط از روی یکدیگر در صفحهٔ دوبعدی دیده می‌شوند. این تصویر مربوط به پردازندهٔ ارائه‌شده در [۶۳] است. همچنین برای تراشه‌ای متفاوت همراه با خطوط ورودی آن، به شکل ۴-۸ مراجعه کنید.

جملهٔ جنبشی دو سهم دارد: یکی ناشی از ظرفیت $\tilde{C}$ و دیگری ناشی از ظرفیت گیت C_g. فرض می‌کنیم بایاس شار خارجی Φ_{ext} در طول زمان ثابت باشد. برای آن‌که لاگرانژی معادله (۴-۱) را به فرم استانداردی با یک انرژی جوزفسون مؤثر تبدیل کنیم، تغییر متغیر زیر را انجام می‌دهیم:

$$\Phi \mapsto \Phi + \frac{\Phi_{\text{ext}}}{۲}.$$

پس از انجام چند ساده‌سازی مثلثاتی، لاگرانژی به شکل زیر درمی‌آید:

$$\mathcal{L} = \frac{\tilde{C}}{۲}\dot{\Phi}^{۲} + \frac{C_g}{۲}\left(\dot{\Phi} - v_g\right)^{۲} + E_J \cos\left[\frac{۲\pi}{\Phi_۰}\left(\Phi - \Phi_{\text{ext}}^{(d)}\right)\right], \qquad (۴\text{-}۲)$$

که در آن انرژی جوزفسون مؤثر سیستم به‌صورت زیر داده می‌شود:

$$E_J = E_J\left(\Phi_{\text{ext}}\right) = \left(E_{J۱} + E_{J۲}\right)\cos\left(\frac{\pi\Phi_{\text{ext}}}{\Phi_۰}\right)\sqrt{۱ + d^{۲}\tan^{۲}\left(\frac{\pi\Phi_{\text{ext}}}{\Phi_۰}\right)}. \qquad (۴\text{-}۳)$$

در اینجا پارامتر

$$d = \frac{E_{J۱} - E_{J۲}}{E_{J۱} + E_{J۲}}$$

عدم‌تقارن بین دو اتصال جوزفسون را توصیف می‌کند. همچنین شار $\Phi_{\text{ext}}^{(d)}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Phi_{\text{ext}}^{(d)} = \arctan\left[d\tan\left(\frac{\pi\Phi_{\text{ext}}}{\Phi_۰}\right)\right]. \qquad (۴\text{-}۴)$$

توجه کنید که وقتی SQUID نامتقارن باشد، یعنی $d \neq ۰$، انرژی جوزفسون مؤثر $E_J(\Phi_{\text{ext}})$ برای هیچ مقداری از Φ_{ext} صفر نمی‌شود؛ زیرا

$$\lim_{\varphi\to\pi/۲}\cos(\varphi)\sqrt{\tan^{۲}(\varphi)} = ۱.$$

در نهایت، با انجام جابه‌جایی اضافی $\Phi \mapsto \Phi + \Phi_{\text{ext}}^{(d)}$، لاگرانژی به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\mathcal{L} = \frac{\tilde{C}}{۲}\dot{\Phi}^۲ + \frac{C_g}{۲}\left(\dot{\Phi} - v_g\right)^۲ + E_J \cos\left(\frac{۲\pi}{\Phi_۰}\Phi\right). \tag{۴-۵}$$

لاگرانژی در معادله (۴-۵)، لاگرانژی کلی یک CPB است؛ مشابه لاگرانژی معادله (۲-۳۷)، با این تفاوت که فقط جملهٔ ولتاژ به آن اضافه شده است، همان‌طور که در بخش ؟؟ نیز دیده شد. با دنبال کردن همان مراحل بخش ؟؟، متغیر مزدوج را به‌صورت زیر شناسایی می‌کنیم:

$$Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} = C\dot{\Phi} - C_g v_g, \tag{۴-۶}$$

که در آن ظرفیت مؤثر را به‌صورت

$$C = \tilde{C} + C_g$$

تعریف کرده‌ایم. بنابراین هامیلتونی، با صرف‌نظر از جمله‌های ثابت، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathcal{H} = \frac{\left(Q + C_g v_g\right)^۲}{۲C} - E_J \cos\left(\frac{۲\pi}{\Phi_۰}\Phi\right). \tag{۴-۷}$$

با استفاده از متغیرهای بی‌بُعد، همان‌گونه که در معادله (۲-۱۸) تعریف شده‌اند، هامیلتونی کوانتومی را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$H = ۴E_C\left(\hat{q} + n_g\right)^۲ - E_J \cos\hat{\phi}, \tag{۴-۸}$$

که در آن بار گیت کاهش‌یافته برابر است با

$$n_g = \frac{C_g v_g}{۲e},$$

و انرژی شارژ E_C همان‌گونه که در معادله (۲-۲۱) تعریف شده است. توجه کنید که عملگر $\hat{\phi}$ می‌تواند مقادیری در $\mathbb{R}$ بگیرد؛ بنابراین نباید آن را مستقیماً با متغیر فاز $\hat{\varphi}$، که در بخش ۲-۲-۲ به آن اشاره شد، یکی دانست. این موضوع را در بخش بعدی بررسی خواهیم کرد.

۴-۱-۱ از شار تا فاز

برای یک مادهٔ ابررسانا، فاز ابررسانایی $\varphi(\mathbf{r})$، که درون ماده تغییر می‌کند، در معادله (۲-۸۴) داده شده است. پس چرا متغیر شار بی‌بُعد $\phi \in \mathbb{R}$ را به‌عنوان درجهٔ آزادی بنیادی یک مدار الکتریکی برای کوانتیزه شدن در نظر می‌گیریم؟ دلیل این کار آن است که مدار الکتریکی یک توصیف درشت‌دانه coarse-grained از ماده است: ما فقط نحوهٔ تغییر فاز $\varphi(\mathbf{r})$ بین دو نقطهٔ $\mathbf{r}_۱$ و $\mathbf{r}_۲$ در ماده را، همراه با پیچش‌های آن، در نظر می‌گیریم. بنابراین، این متغیر مقادیری در $\mathbb{R}$ می‌گیرد و برابر با شار شاخه‌ای بی‌بُعد ϕ بین گره‌های $\mathbf{r}_۱$ و $\mathbf{r}_۲$ است. وقتی شبکهٔ الکتریکی فقط شامل جمله‌های تناوبی برحسب شارهای شاخه‌ای باشد، می‌توان دوباره به متغیرهای فاز بازگشت. در این بخش، برای توضیح دقیق این موضوع، یک بررسی ریاضی انجام می‌دهیم؛ این کار را می‌توان به‌صورت کار کردن در یک فضای هیلبرت محدودشده در نظر گرفت.

ابتدا عملگرهای انتقال در شار و بار را معرفی می‌کنیم:

$$T_\phi(\tau) = e^{-i\tau\hat{q}}, \qquad T_q(\tau) = e^{i\tau\hat{\phi}}. \tag{۴-۹}$$

برای هر دو عملگر A و B، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$e^A B e^{-A} = B + [A,B] + \frac{۱}{۲!}[A,[A,B]] + \frac{۱}{۳!}[A,[A,[A,B]]] + \cdots = \sum_{n=۰}^{+\infty} C_n, \tag{۴-۱۰}$$

که در آن تعریف می‌کنیم:

$$C_{\cdot} = B, \qquad (\text{۴-۱۱آ})$$
$$C_n = [A, C_{n-۱}], \qquad n \geq ۱. \qquad (\text{۴-۱۱ب})$$

از معادله (۴-۱۰) و رابطهٔ جابه‌جایی معادله (۲-۲۳)، به‌سادگی می‌توان نشان داد که:

$$T_\phi(\tau)^\dagger \hat{\phi} T_\phi(\tau) = \hat{\phi} + \tau, \qquad (\text{۴-۱۲آ})$$
$$T_q(\tau)^\dagger \hat{q} T_q(\tau) = \hat{q} + \tau. \qquad (\text{۴-۱۲ب})$$

با استفاده از رابطهٔ قبلی می‌بینیم که برای هامیلتونی CPB در معادله (۴-۸) داریم:

$$T_\phi(۲\pi)^\dagger H T_\phi(۲\pi) = H.$$

بنابراین، عملگر انتقال $T_\phi(۲\pi)$ با H جابه‌جا می‌شود. این موضوع نشان می‌دهد که می‌توان این عملگرها را به‌طور همزمان قطری کرد.
H و $T_\phi(۲\pi)$ [۶۴]. این واقعیت اساساً به قضیهٔ بلوخ Bloch برای هامیلتونی ما منجر می‌شود [۶۵]. ابتدا عملگر $\hat{q}$ را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\hat{q} = \hat{n} + \hat{n}_\alpha, \qquad (\text{۴-۱۳})$$

که در آن عملگرهای $\hat{n}$ و $\hat{n}_\alpha$ روی یک حالت ویژهٔ بار $|q \in \mathbb{R}\rangle$ به‌شکل زیر عمل می‌کنند:

$$\hat{n}|q\rangle = n|q\rangle = \lfloor q \rfloor |q\rangle, \qquad \hat{n}_\alpha|q\rangle = n_\alpha|q\rangle = (q \bmod ۱)|q\rangle. \qquad (\text{۴-۱۴})$$

به این ترتیب، می‌توانیم حالت‌های ویژهٔ $\hat{q}$ را به‌صورت $|q\rangle = |n, n_\alpha\rangle$ برچسب‌گذاری کنیم، به‌طوری که

$$\hat{q}|n, n_\alpha\rangle = (n + n_\alpha)|n, n_\alpha\rangle,$$

که در آن $n_\alpha \in [\cdot, ۱)$ و $n \in \mathbb{Z}$ است. برای عملگر شار نیز به‌صورت مشابه عمل می‌کنیم و می‌نویسیم:

$$\hat{\phi} = \hat{\varphi} + ۲\pi\hat{k}. \qquad (\text{۴-۱۵})$$

می‌توانیم حالت‌های ویژهٔ $\hat{\phi}$ را به‌صورت

$$|\phi \in \mathbb{R}\rangle = |\phi = \varphi + ۲\pi k\rangle$$

برچسب‌گذاری کنیم، که در آن $\varphi \in [\cdot, ۲\pi)$ و $k \in \mathbb{Z}$ است. از آنجا که هامیلتونی با عملگر انتقال $T_\phi(۲\pi)$ جابه‌جا می‌شود، می‌توانیم خود را به زیرفضاهایی با مقادیر ویژهٔ ثابتِ $T_\phi(۲\pi)$ محدود کنیم.
حال زیرفضای ویژهٔ $\mathcal{H}_{n_\alpha}$ را با مقدار ویژهٔ $e^{-i۲\pi n_\alpha}$ برای $T_\phi(۲\pi)$ در نظر می‌گیریم؛ یعنی:

$$\mathcal{H}_{n_\alpha} = \left\{ |\psi\rangle \;\middle|\; T_\phi(۲\pi)|\psi\rangle = e^{-i۲\pi n_\alpha}|\psi\rangle \right\}, \qquad (\text{۴-۱۶})$$

که آن را زیرفضای روتور rotor subspace می‌نامیم. توجه کنید که شرط داده‌شده در معادله (۴-۱۶) را می‌توان به‌عنوان یک شرط مرزی روی تابع موج تفسیر کرد. یک پایه برای زیرفضای روتور توسط حالت‌های نرمال‌نشدهٔ زیر داده می‌شود:

$$|\varphi, n_\alpha\rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{i۲\pi n_\alpha k}|\phi = \varphi + ۲\pi k\rangle, \qquad (\text{۴-۱۷})$$

زیرا:

$$\begin{aligned} T_\phi(2\pi)|\varphi, n_\alpha\rangle &= e^{-i2\pi\hat{q}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{i2\pi n_\alpha k}|\varphi + 2\pi k\rangle \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{i2\pi n_\alpha k}|\varphi + 2\pi(k+1)\rangle \\ &= e^{-i2\pi n_\alpha}|\varphi, n_\alpha\rangle. \end{aligned} \tag{۴-۱۸}$$

همچنین توجه کنید که تصویرگر روی این زیرفضا به‌صورت زیر است:

$$\Pi_{n_\alpha} = \int_0^{2\pi} d\varphi\, |\varphi, n_\alpha\rangle\langle\varphi, n_\alpha|, \tag{۴-۱۹}$$

و با انتگرال‌گیری روی همهٔ این تصویرگرها، همانانی استاندارد روی کل فضای هیلبرت به‌دست می‌آید:

$$\int_0^1 dn_\alpha\, \Pi_{n_\alpha} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi\, |\phi\rangle\langle\phi| = 1. \tag{۴-۲۰}$$

همچنین مفید است که برای زیرفضاهای روتور، یک پایهٔ بار تعریف کنیم. در واقع، چون عملگر انتقال $T_\phi(2\pi)$ دارای مقادیر ویژهٔ $e^{-i2\pi n_\alpha}$ است، زیرفضای $\mathcal{H}_{n_\alpha}$ باید توسط کت‌های ویژهٔ عملگر بار با مقدار ویژهٔ $n + n_\alpha$، یعنی حالت‌های $|n, n_\alpha\rangle$، پوشانده شود. در نتیجه، تصویرگر روی زیرفضای روتور که در معادله (۴-۱۹) آمده است، می‌تواند به‌صورت زیر نیز نوشته شود:

$$\Pi_{n_\alpha} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n, n_\alpha\rangle\langle n, n_\alpha|. \tag{۴-۲۱}$$

این نتیجه را می‌توان به‌صورت ریاضی با نوشتن رابطهٔ زیر به‌دست آورد:

$$\begin{aligned} |n, n_\alpha\rangle = |n + n_\alpha\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi\, e^{i(n+n_\alpha)\phi}|\phi\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} d\varphi \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{i(n+n_\alpha)(\varphi+2\pi k)}|\varphi + 2\pi k\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{i(n+n_\alpha)\varphi}|\varphi, n_\alpha\rangle, \end{aligned} \tag{۴-۲۲}$$

و سپس با استفاده از نمایش زیر برای شانهٔ دیراک Dirac comb:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ikx} = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(x - 2\pi k). \tag{۴-۲۳}$$

از این رابطه همچنین نتیجه می‌شود که حالت‌های $|\varphi, n_\alpha\rangle$ را می‌توان به‌صورت ترکیب خطی از حالت‌های $|n, n_\alpha\rangle$ نوشت:

$$|\varphi, n_\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-i(n+n_\alpha)\varphi}|n, n_\alpha\rangle. \tag{۴-۲۴}$$

اکنون مسئلهٔ مقدار ویژهٔ مربوط به هامیلتونی CPB در معادله (۴-۸) را بررسی می‌کنیم. برای این کار، می‌توانیم روی هر زیرفضای روتور تصویر کنیم و هامیلتونی‌های تصویرشدهٔ زیر را به‌دست آوریم:

$$H_{n_\alpha} = \Pi_{n_\alpha} H \Pi_{n_\alpha}, \tag{۴-۲۵}$$

که با n_α پارامتری می‌شود. پس از تصویر کردن روی این زیرفضا، مسئله معادل مسئلهٔ یک پاندول یا روتور است؛ در آن بار گسستهٔ $\hat{n}$ نقش تکانهٔ زاویه‌ای را بازی می‌کند و فاز $\hat{\phi}$ نقش زاویه را دارد. در پایهٔ بار گسسته که در معادله (۴-۲۲) تعریف شد، با استفاده از معادله (۴-۲۱) و رابطهٔ

$$e^{i\hat{\phi}}|n, n_\alpha\rangle = |n+1, n_\alpha\rangle, \tag{۴-۲۶}$$

به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} H_{n_\alpha} = &\sum_{n\in\mathbb{Z}} 4E_C\left(n+n_\alpha+n_g\right)^2 |n, n_\alpha\rangle\langle n, n_\alpha| \\ &- \frac{E_J}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(|n+1, n_\alpha\rangle\langle n, n_\alpha| + |n, n_\alpha\rangle\langle n+1, n_\alpha|\right). \end{aligned} \tag{۴-۲۷}$$

در جملهٔ آخر می‌بینیم که عملگر $\cos(\hat{\phi})$ در $\Pi_{n_\alpha} H \Pi_{n_\alpha}$ مانند یک فرایند تونل‌زنی جفت کوپر عمل می‌کند؛ در اینجا n اختلاف تعداد جفت‌های کوپر روی یکی از جزیره‌های ابررسانا است. معادله (۴-۳۰) همچنین نشان می‌دهد که اثر بار آفست n_g معادل تغییر دادن زیرفضای روتور است. طیف هامیلتونی H_{n_α} که به زیرفضای روتور $\mathcal{H}_{n_\alpha}$ محدود شده است، به n_g وابسته است. طیف هامیلتونی کامل، اجتماع همهٔ طیف‌های به‌دست‌آمده در زیرفضاهای روتور است و به n_g وابسته نیست. معادله (۴-۳۰) همچنین نشان می‌دهد که برای یک $n_\alpha \in [0, 1)$ ثابت، طیف H_{n_α} برحسب n_g باید با دورهٔ ۱ تناوبی باشد. معادله (۴-۳۰) بلافاصله یک روش عددی برای قطری‌سازی H_{n_α} پیشنهاد می‌کند: می‌توانیم فقط تعداد محدودی از حالت‌های بار $|n, n_\alpha\rangle$ را در نظر بگیریم و یک ماتریس متناهی بسازیم که به‌صورت عددی قابل قطری‌سازی است.[۱]

ترازهای انرژی H_{n_α} برای $n_\alpha = 0$ برحسب n_g در شکل ۴-۳ نشان داده شده‌اند. این نمودارها را می‌توان به‌عنوان ساختار نواری band structure مربوط به CPB نیز تفسیر کرد، زیرا بین n_g و n_α هم‌ارزی وجود دارد. اطلاعات کوانتومی معمولاً در دو تراز نخست، یعنی دو باند اول، کدگذاری می‌شود که زیرفضای کیوبیت را تعریف می‌کنند. بلافاصله مشاهده می‌شود که با افزایش پارامتر E_J/E_C، ترازهای انرژی نسبت به پارامتر n_g حساسیت کمتری پیدا می‌کنند و برای $E_J/E_C = 50$ تقریباً نسبت به آن بی‌حساس می‌شوند. بنابراین، در این رژیم پارامتریِ CPB، حتی ترازهای کم‌انرژی هامیلتونی‌های H_{n_α} نیز وابستگی بسیار ضعیفی به n_g نشان می‌دهند. این ویژگی بسیار مطلوب است، زیرا نرخ واهمدوسی فازی ناشی از نویز بار، یعنی نویز در پارامتر n_g، به مشتق‌های ترازهای انرژی برحسب این پارامتر مربوط است [۶۶]. همچنین به مفهوم نقاط شیرین sweet spots در بخش ۷-۳ مراجعه کنید. این همان ویژگی مهمی است که باعث می‌شود ترانسمون در برابر نویز بار مقاوم باشد.

دلیل کیفی این پدیده آن است که برای $E_J/E_C \gg 1$، سیستم هرچه بیشتر مانند یک نوسانگر هماهنگ سنگین رفتار می‌کند که حالت‌های ویژهٔ کم‌انرژی آن در کمینهٔ پتانسیل کسینوسی به‌خوبی موضعی شده‌اند. این یعنی دست‌کم این ترازهای کم‌انرژی اثر شرط مرزی معادله (۴-۱۶) را نمی‌بینند، زیرا تابع موج به‌سرعت و دور از کمینهٔ پتانسیل به صفر میل می‌کند. همان‌طور که در بخش ۴-۲ خواهیم دید، این موضوع تقریب موسوم به تقریب ترانسمون را توجیه می‌کند؛ تقریبی که در آن CPB را برای $E_J/E_C \gg 1$ به‌صورت یک نوسانگر دافینگ Duffing ناهماهنگ در نظر می‌گیریم. به‌عنوان یک اثر جانبی، سیستم فقط به‌طور ضعیفی ناهماهنگ خواهد بود، همان‌طور که در شکل ؟؟ دیده می‌شود، و این موضوع به مسئلهٔ نشت از زیرفضای محاسباتی کیوبیت منجر می‌شود.

ارزش دارد که مسئلهٔ مقدار ویژه را در پایهٔ فاز $|\varphi, n_\alpha\rangle$ نیز بررسی کنیم. این مسئله به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

۴-۱-۲ طیف CPB

اکنون مسئلهٔ مقدار ویژهٔ مربوط به هامیلتونی CPB در معادله (۴-۸) را بررسی می‌کنیم. برای این کار، می‌توانیم روی هر زیرفضای روتور تصویر کنیم و هامیلتونی‌های تصویرشده را به‌صورت زیر به‌دست آوریم:

$$H_{n_\alpha} = \Pi_{n_\alpha} H \Pi_{n_\alpha}, \tag{۴-۲۸}$$

[۱] البته، این حالت‌ها باید به‌صورت متقارن حول حالتی $|n, n_\alpha\rangle$ انتخاب شوند که برای آن مقدار $(n+n_\alpha+n_g)^2$ کمینه است.

که با n_α پارامتری می‌شوند. وقتی روی این زیرفضا تصویر می‌کنیم، مسئله معادل مسئلهٔ یک پاندول یا روتور می‌شود؛ در این توصیف، بار گسستهٔ $\hat{n}$ نقش تکانهٔ زاویه‌ای را بازی می‌کند و فاز $\hat{\phi}$ نقش زاویه را دارد. در پایهٔ بار گسسته که در معادله (۴-۲۲) تعریف شده است، با استفاده از معادله (۴-۲۱) و از آنجا که

$$e^{i\hat{\phi}}|n, n_\alpha\rangle = |n+۱, n_\alpha\rangle, \tag{۴-۲۹}$$

داریم:

$$\begin{aligned} H_{n_\alpha} = &\sum_{n\in\mathbb{Z}} ۴E_C\left(n+n_\alpha+n_g\right)^۲|n, n_\alpha\rangle\langle n, n_\alpha| \\ &-\frac{E_J}{۲}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(|n+۱, n_\alpha\rangle\langle n, n_\alpha| + |n, n_\alpha\rangle\langle n+۱, n_\alpha|\right). \end{aligned} \tag{۴-۳۰}$$

در جملهٔ آخر می‌بینیم که عملگر $\cos(\hat{\phi})$ در $\Pi_{n_\alpha}H\Pi_{n_\alpha}$ مانند یک فرایند تونل‌زنی جفت کوپر عمل می‌کند؛ در اینجا n اختلاف تعداد جفت‌های کوپر روی یکی از جزیره‌های ابررسانا است. معادله (۴-۳۰) همچنین نشان می‌دهد که اثر بار آفست n_g معادل تغییر دادن زیرفضای روتور است. طیف هامیلتونی H_{n_α} که به زیرفضای روتور $\mathcal{H}_{n_\alpha}$ محدود شده است، به n_g وابسته است. اما طیف هامیلتونی کامل، اجتماع همهٔ طیف‌هایی است که در زیرفضاهای روتور به‌دست می‌آیند و به n_g وابسته نیست. معادله (۴-۳۰) همچنین نشان می‌دهد که برای یک $n_\alpha \in [۰, ۱)$ ثابت، طیف H_{n_α} برحسب n_g باید با دورهٔ ۱ تناوبی باشد. معادله (۴-۳۰) بلافاصله یک روش عددی برای قطری‌سازی H_{n_α} پیشنهاد می‌کند: کافی است تعداد محدودی از حالت‌های بار $|n, n_\alpha\rangle$ را در نظر بگیریم و یک ماتریس متناهی بسازیم که بتوان آن را به‌صورت عددی قطری‌سازی کرد.[۲]

ترازهای انرژی H_{n_α} برای $n_\alpha = ۰$ برحسب n_g در شکل ۴-۳ نشان داده شده‌اند. این نمودارها را می‌توان به‌عنوان ساختار نواری band structure مربوط به CPB نیز تفسیر کرد، زیرا بین n_g و n_α هم‌ارزی وجود دارد. اطلاعات کوانتومی معمولاً در دو تراز نخست، یعنی دو باند اول، کدگذاری می‌شود که زیرفضای کیوبیت را تعریف می‌کنند. بلافاصله مشاهده می‌شود که با افزایش پارامتر E_J/E_C، ترازهای انرژی نسبت به پارامتر n_g حساسیت کمتری پیدا می‌کنند و برای $E_J/E_C = ۵۰$ عملاً نسبت به آن بی‌حساس می‌شوند. بنابراین، در این رژیم پارامتریِ CPB، حتی ترازهای کم‌انرژی هامیلتونی‌های H_{n_α} نیز وابستگی بسیار ضعیفی به n_g نشان می‌دهند. این ویژگی به‌وضوح یک خاصیت مطلوب برای سیستم است، زیرا نرخ واهلش فازی ناشی از نویز بار، یعنی نویز در پارامتر n_g، به مشتق‌های ترازهای انرژی نسبت به این پارامتر مربوط است [۶۶]. همچنین به مفهوم «نقاط شیرین» sweet spots در بخش ۳-۷ مراجعه کنید. این همان ویژگی مهمی است که باعث می‌شود ترانسمون در برابر نویز بار مقاوم باشد.

دلیل کیفی این پدیده آن است که برای $E_J/E_C \gg ۱$، سیستم هرچه بیشتر مانند یک نوسانگر هماهنگ سنگین رفتار می‌کند که حالت‌های ویژهٔ کم‌انرژی آن در کمینهٔ پتانسیل کسینوسی به‌خوبی موضعی شده‌اند. این یعنی دست‌کم این ترازهای کم‌انرژی، اثر شرط مرزی معادله (۴-۱۶) را نمی‌بینند، زیرا تابع موج به‌سرعت و دور از کمینهٔ پتانسیل به صفر میل می‌کند. همان‌طور که در بخش ۴-۲ خواهیم دید، این موضوع تقریب موسوم به تقریب ترانسمون را توجیه می‌کند؛ تقریبی که در آن CPB را برای $E_J/E_C \gg ۱$ به‌صورت یک نوسانگر دافینگ Duffing ناهماهنگ در نظر می‌گیریم. به‌عنوان یک اثر جانبی، سیستم فقط به‌طور ضعیفی ناهماهنگ خواهد بود، همان‌طور که در شکل ؟؟ دیده می‌شود، و این موضوع به مسئلهٔ نشت از زیرفضای محاسباتی کیوبیت منجر می‌شود.

ارزش دارد که مسئلهٔ مقدار ویژه را در پایهٔ فاز $|\varphi, n_\alpha\rangle$ نیز بررسی کنیم. این مسئله به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

(۴-۳۱)

$$H_{n_\alpha}|\varphi, n_\alpha\rangle = E|\varphi, n_\alpha\rangle \quad\Longrightarrow\quad \left[۴E_C\left(-i\frac{d}{d\varphi}+n_\alpha+n_g\right)^۲ - E_J\cos\varphi\right]\psi_{n_\alpha}(\varphi) = E\psi_{n_\alpha}(\varphi),$$

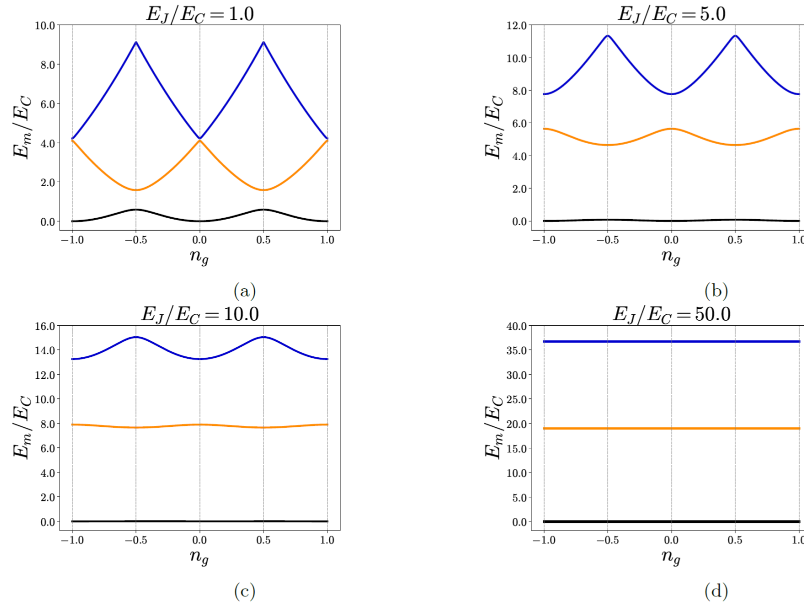
با شرط مرزی:

$$T_q(۲\pi)|\varphi, n_\alpha\rangle = e^{-i۲\pi n_\alpha}|\varphi, n_\alpha\rangle \quad\Longrightarrow\quad \psi_{n_\alpha}(\varphi+۲\pi) = e^{-i۲\pi n_\alpha}\psi_{n_\alpha}(\varphi). \tag{۴-۳۲}$$

[۲] البته، این حالت‌ها باید به‌صورت متقارن حول حالتی $|n, n_\alpha\rangle$ انتخاب شوند که برای آن مقدار $(n+n_\alpha+n_g)^۲$ کمینه است.

این مسئلهٔ مقدار ویژه، جواب تحلیلی برحسب توابع متیو Mathieu functions دارد [۶۶]. به‌طور خاص، برای $n_g \in [۰, ۱/۲)$ و $n_\alpha = ۰$، انرژی‌های ویژه به‌صورت زیر داده می‌شوند:

$$E_m(n_g) = E_C M_A \left(k_f(m, n_g), -\frac{E_J}{۲E_C}\right), \qquad m \in \mathbb{N}. \qquad (۴\text{-}۳۳)$$



شکل ۴-۳: سه تراز انرژی نخست هامیلتونی CPB، محدودشده به زیرفضای روتور در معادله (۴-۳۰)، برای $n_\alpha = ۰$ برحسب بار آفست n_g و برای مقادیر مختلف پارامتر E_J/E_C نشان داده شده‌اند. در هر نمودار، صفر انرژی برابر با کمینهٔ انرژی پایین‌ترین تراز در نظر گرفته شده است. توجه کنید که برای مقدارهای بزرگ E_J/E_C، مثلاً $E_J/E_C = ۵۰,۰$، طیف انرژی وابستگی خود را به n_g از دست می‌دهد؛ البته به قیمت آن‌که فقط به‌طور ضعیفی ناهماهنگ anharmonic باقی می‌ماند.

که در آن $M_A(\tau, q)$ مقدار مشخصهٔ متیو Mathieu characteristic value برای توابع متیوی زوج even Mathieu functions است.[۳] همچنین تعریف کرده‌ایم:

$$k_f(m, n_g) = m + ۱ - \big((m + ۱) \bmod ۲\big) + ۲n_g(-۱)^m. \qquad (۴\text{-}۳۴)$$

توجه کنید که از رابطهٔ قبلی می‌توان انرژی‌های ویژه را برای هر $n_\alpha \in [۰, ۱)$ بازسازی کرد.

دینامیک در پایهٔ فاز

در این مرحله باید از خود بپرسیم که چگونه باید با یک CPB برخورد کنیم. آیا باید فرض کنیم که سیستم اجازه دارد کل فضای هیلبرت نوسانگر را کاوش کند، یا باید در یک زیرفضای مشخص $\mathcal{H}_{n_\alpha}$ کار کنیم؟ پاسخ این است که این موضوع در واقع به نحوهٔ کوپل شدن سیستم به سایر المان‌های مدار و همچنین به تاریخچهٔ CPB بستگی دارد.
اگر CPB هرگز به المان‌هایی از مدار کوپل نشده باشد که با عملگر $T_\phi(۲\pi)$ جابه‌جا نمی‌شوند، یعنی المان‌هایی که می‌توانند باعث اختلاط بین زیرفضاهای روتور شوند، آنگاه حالت CPB به‌طور طبیعی در یکی از این زیرفضاها محصور خواهد بود. این همان اتفاقی است که هنگام سرد کردن یک CPB ساده رخ می‌دهد؛ یعنی CPBای که به‌صورت خازنی به بخش‌های دیگر مدار کوپل شده است. از آنجا که سیستم در زیرفضای روتور محصور است، باید به‌طور متناظر یک حالت گرمایی تعریف‌شده در همین زیرفضا را در نظر گرفت.

[۳] در اینجا از همان تعریفی استفاده می‌کنیم که در نرم‌افزار Wolfram Mathematica به‌کار می‌رود.

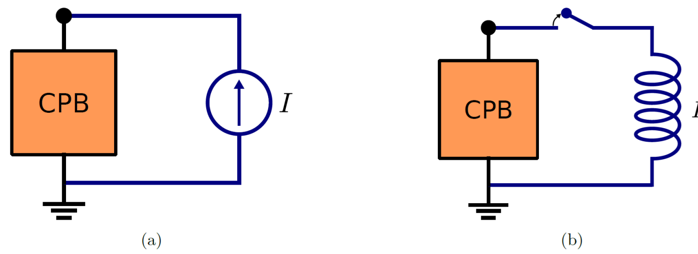
همچنین اگر فرض کنیم که در رژیم $E_J/E_C \gg ۱$ کار می‌کنیم، دانستن این‌که دقیقاً در کدام زیرفضای روتور $\mathcal{H}_{n_\alpha}$ قرار داریم اهمیت چندانی ندارد، زیرا طیف فقط وابستگی کوچکی به آن خواهد داشت. اما اگر $E_J/E_C \lesssim ۱$ باشد، در صورتی می‌توانیم بفهمیم در کدام زیرفضای $\mathcal{H}_{n_\alpha}$ هستیم که n_g را بدانیم و بتوانیم طیف‌سنجی انجام دهیم. در عمل، همیشه می‌توان مسئله را به‌صورت مسئله‌ای تعریف‌شده در $\mathcal{H}_{n_\alpha=۰}$ با یک n_g جابه‌جاشده در نظر گرفت. به همین دلیل است که در بررسی‌های معمول CPB، اغلب از همان ابتدا فرض می‌شود که $n_\alpha = ۰$.

با این حال، شرایطی نیز وجود دارد که در آن‌ها می‌تواند بین زیرفضاهای روتور اختلاط رخ دهد و در نتیجه باید حالت‌هایی را در نظر بگیریم که در فضای هیلبرت نوسانگر نرمال شده‌اند. دو نمونه از این حالت‌ها در شکل ۴-۴ آورده شده است.

در شکل ؟؟، یک CPB توسط یک منبع جریان بایاس شده است. ما پیش‌تر با این مدار در بخش ؟؟ روبه‌رو شدیم؛ جایی که دیدیم این مدار منجر به پتانسیل تخته‌شویی washboard potential نشان‌داده‌شده در شکل ۲-۱۳ می‌شود. منبع جریان جمله‌ای متناسب با $I\phi$ به هامیلتونی CPB اضافه می‌کند که با $T_\phi(۲\pi)$ جابه‌جا نمی‌شود. در این حالت، بار روی خازن مجبور نیست فقط مقدارهای گسسته اختیار کند و کل فضای هیلبرت نوسانگر می‌تواند کاوش شود.

نمونهٔ دیگر در شکل ؟؟ نشان داده شده است؛ در این حالت CPB با یک القاگر شنت شده است و این القاگر جمله‌ای به‌شکل $E_L\hat{\phi}^۲/۲$ اضافه می‌کند. بسته به رژیم پارامتری، سیستم در این حالت می‌تواند یک کیوبیت شار flux qubit یا یک فلاکسونیوم fluxonium نامیده شود. دوباره، القاگر باعث می‌شود بار روی خازن بتواند مقدار دلخواهی داشته باشد و در نتیجه سیستم جواب‌هایی داشته باشد که در فضای نوسانگر گسترده شده‌اند.

فرض کنید سیستم در حضور القاگر در حالت $|\psi\rangle$ باشد؛ حالتی که برهم‌نهی‌ای از حالت‌هایی است که در زیرفضاهای روتور مختلف با برچسب n_α قرار دارند. حال اگر به‌طور ناگهانی القاگر را خاموش کنیم، سیستم دوباره یک CPB خواهد بود، اما حالت اولیهٔ آن دیگر در یک زیرفضای روتور واحد محصور نیست. دینامیک زمانی آن می‌تواند به‌صورت موازی در هر زیرفضای روتور توصیف شود و حالت‌های زیرفضاهای روتور مختلف را با هم مخلوط نمی‌کند. این حالت در [۶۷] نیز بررسی شده است.



شکل ۴-۴: نمونه‌هایی از مدارهایی که باعث اختلاط بین زیرفضاهای روتور می‌شوند: (a) یک CPB همراه با منبع جریان. (b) یک CPB همراه با القاگر قابل‌کلیدزنی.

۴-۲ تقریب ناهارمونیک

در بخش قبلی، مسئلهٔ مقدار ویژهٔ CPB را به‌طور دقیق فرمول‌بندی کردیم. همچنین استدلال کردیم که در رژیم $E_J/E_C \gg ۱$، سیستم در انرژی‌های پایین مانند یک نوسانگر هماهنگ رفتار می‌کند و ترازهای انرژی آن وابستگی ضعیفی به پارامتر n_g نشان می‌دهند. این مشاهده، تقریبی را پیشنهاد می‌کند که در اینجا بررسی می‌کنیم.

هامیلتونی معادله (۴-۸) را در نظر می‌گیریم و در ابتدا n_g را نادیده می‌گیریم. در رژیم $E_J/E_C \gg ۱$، تابع‌های موج کم‌انرژی، در هر زیرفضای روتور، بسیار نزدیک به $\phi = ۰$ موضعی می‌شوند. بنابراین منطقی است که کسینوس را حول $\phi = ۰$ یا به‌طور معادل حول هر $\phi = ۲\pi k$، که در آن $k \in \mathbb{Z}$ است، بسط تیلور دهیم. برای در نظر گرفتن اثرهای غیرخطی، بسط تیلور را تا مرتبهٔ چهارم نگه می‌داریم و هامیلتونی ترانسمون را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$H_{\text{tr}} = ۴E_C\hat{q}^۲ + \frac{E_J}{۲}\hat{\phi}^۲ - \frac{E_J}{۲۴}\hat{\phi}^۴, \quad (۴\text{-}۳۵)$$

که در آن جمله‌های ثابت را نیز حذف کرده‌ایم. اکنون عملگرهای نابودی و آفرینش را معرفی می‌کنیم که بخش درجه‌دوم هامیلتونی را قطری می‌کنند:

$$\hat{\phi} = \left(\frac{۲E_C}{E_J}\right)^{۱/۴}\left(\hat{b} + \hat{b}^\dagger\right), \quad \text{(۴-۳۶آ)}$$

$$\hat{q} = \frac{i}{۲}\left(\frac{E_J}{۲E_C}\right)^{۱/۴}\left(\hat{b}^\dagger - \hat{b}\right), \quad \text{(۴-۳۶ب)}$$

که در آن

$$[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = ۱.$$

برای کامل بودن بحث، عملگرهای اصلی $\hat{\Phi}$ و $\hat{Q}$ را نیز برحسب عملگرهای نابودی و آفرینش می‌نویسیم:

$$\hat{\Phi} = \sqrt{\frac{\hbar Z_t}{۲}}\left(\hat{b} + \hat{b}^\dagger\right), \quad \text{(۴-۳۷آ)}$$

$$\hat{Q} = i\sqrt{\frac{\hbar}{۲Z_t}}\left(\hat{b}^\dagger - \hat{b}\right), \quad \text{(۴-۳۷ب)}$$

که در آن

$$Z_t = \sqrt{\frac{L_J}{C}}$$

امپدانس مشخصهٔ ترانسمون است. معرفی عملگرهای نابودی و آفرینش، البته کاملاً معادل حالت یک نوسانگر LC است که در بخش ۲-۲-۱ بررسی شد.

با جایگذاری معادله‌های (؟؟) در معادله (۴-۳۵) و حذف دوبارهٔ جمله‌های ثابت، به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$H_{\text{tr}} = \sqrt{۸E_J E_C}\,\hat{b}^\dagger\hat{b} - \frac{E_C}{۱۲}\left(\hat{b}^\dagger + \hat{b}\right)^۴. \quad \text{(۴-۳۸)}$$

اکنون یک تقریب دیگر انجام می‌دهیم. جملهٔ چهاردرجه‌ای در معادله (۴-۳۸) را می‌توان به‌عنوان یک اختلال روی هامیلتونی نوسانگر هماهنگ $\sqrt{۸E_J E_C}\,\hat{b}^\dagger\hat{b}$ در نظر گرفت. چون فرض کرده‌ایم $E_J/E_C \gg ۱$، پس داریم:

$$\frac{E_C}{\sqrt{۸E_J E_C}} \ll ۱.$$

بنابراین می‌توانیم اختلال را با نظریهٔ اختلال مرتبهٔ پایین بررسی کنیم. این کار معادل آن است که فقط جمله‌های قطریِ $(\hat{b}^\dagger + \hat{b})^۴$ را نگه داریم؛ یعنی جمله‌هایی که تعداد برابر از عملگرهای نابودی و آفرینش دارند و در نتیجه حالت‌های ویژهٔ هامیلتونی نوسانگرِ بدون اختلال را تغییر نمی‌دهند. این تقریب گاهی تقریب موج چرخان Rotating Wave Approximation یا RWA نیز نامیده می‌شود، زیرا اگر در تصویر برهم‌کنش یا چارچوب چرخان کار کنیم، معادل نادیده گرفتن جمله‌های سریع‌چرخان است.

با نگه داشتن فقط جمله‌های قطری در بسط $(\hat{b}^\dagger + \hat{b})^۴$ و با اعمال تکراری رابطهٔ جابه‌جایی

$$[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = ۱,$$

به‌دست می‌آوریم:

$$\left(\hat{b}^\dagger + \hat{b}\right)^۴ \overset{\text{RWA}}{\approx} ۶\hat{b}^\dagger\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{b} + ۱۲\hat{b}^\dagger\hat{b}. \quad \text{(۴-۳۹)}$$

بنابراین، هامیلتونی ترانسمون را با هامیلتونی یک نوسانگر دافینگ Duffing oscillator تقریب می‌زنیم:

$$H_{\text{tr}} \overset{\text{RWA}}{\approx} H_{\text{Duffing}} = \hbar\Omega\hat{b}^\dagger\hat{b} + \frac{\hbar\delta}{۲}\hat{b}^\dagger\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{b}, \quad \text{(۴-۴۰)}$$

که در آن، با نشان دادن انرژی‌های ویژهٔ مربوط به حالت فوک $|n\rangle$ با E_n، فرکانس ترانسمون را به‌صورت زیر تعریف کرده‌ایم:

$$\Omega = \frac{E_۱ - E_۰}{\hbar} = \frac{\sqrt{۸E_J E_C} - E_C}{\hbar}, \tag{۴-۴۱}$$

و ناهماهنگی برابر است با:

$$\delta = \frac{(E_۲ - E_۱) - (E_۱ - E_۰)}{\hbar} = -\frac{E_C}{\hbar}. \tag{۴-۴۲}$$

شایان ذکر است که هامیلتونی معادله (۴-۴۰) در فرم قطری نوشته شده است و بنابراین به ما اجازه می‌دهد همهٔ ترازهای انرژی را بلافاصله به‌دست آوریم. در نتیجه، برای $E_J/E_C \gg ۱$، ناهماهنگی CPB منفی است؛ موضوعی که در شکل ؟؟ نیز دیده می‌شود. ناهماهنگی نسبی

$$\delta_r = \frac{\delta}{\Omega}$$

میزان هماهنگ بودن سیستم را کمی‌سازی می‌کند و همان‌طور که انتظار می‌رود، برای $E_J/E_C \to \infty$ داریم:

$$\delta_r \to ۰,$$

که متناظر با رفتار کاملاً هماهنگ است.

اگر سیستم بیش از حد هماهنگ باشد، ترانسمون با مشکل نشت leakage روبه‌رو می‌شود. اگر از حالت پایه شروع کنیم و یک رانش با فرکانس زاویه‌ای تقریباً برابر با Ω اعمال کنیم، سیستم فقط در زیرفضای کیوبیتی محصور نمی‌ماند، بلکه ترازهای بالاتر نیز پر می‌شوند. به‌طور خاص، یک نوسانگر هماهنگ رانده‌شده به یک حالت همدوس coherent state تکامل می‌یابد [۶۸]:

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^۲/۲} \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \tag{۴-۴۳}$$

که در آن دامنهٔ همدوس $\alpha \in \mathbb{C}$ به دامنه، فرکانس و فاز رانش بستگی دارد. این مسئلهٔ نشت، که ممکن است به‌دلیل گیت‌های دوکیوبیتی، اندازه‌گیری کیوبیت یا رانش‌های بین‌کیوبیتی نیز رخ دهد، یک مسئلهٔ جدی است؛ زیرا کدهای استاندارد تصحیح خطای کوانتومی مبتنی بر کیوبیت، مانند کد سطحی surface code [۶۹]، برای تصحیح چنین خطاهایی طراحی نشده‌اند.

کیوبیت‌های ترانسمون معمولاً در رژیم

$$۴۰ \leq E_J/E_C \leq ۱۰۰$$

کار می‌کنند؛ رژیمی که در آن میان حساسیت به نویز بار و ناهماهنگی مصالحه‌ای برقرار می‌شود. علاوه بر این، ترانسمون‌ها به‌گونه‌ای طراحی می‌شوند که فرکانس آن‌ها در محدودهٔ مایکروویو باشد؛ یعنی:

$$\Omega/۲\pi = ۴\text{–}۸ \text{ GHz},$$

در حالی که انرژی شارژ معمولاً به‌صورت

$$E_C/h = ۲۰۰\text{–}۳۰۰ \text{ MHz}$$

انتخاب می‌شود. این مقدار متناظر با یک ظرفیت مؤثر

$$C = ۶۰\text{–}۸۰ \text{ fF}$$

است.

تمرین ۱.۲.۴: CPB در پایهٔ بار

هامیلتونی CPB را در پایهٔ بار گسسته، همانند معادله (۴-۳۰)، در نظر بگیرید. برای سادگی، قرار می‌دهیم:

$$n_\alpha = ۰.$$

۱. فقط تعداد محدودی از حالت‌های بار گسسته را در نظر بگیرید و آن‌ها را به‌صورت متقارن حول حالت با بار صفر انتخاب کنید. سپس انرژی‌های ویژه را به‌صورت عددی به‌دست آورید و نمودارهای شکل ؟؟ را بازتولید کنید.

راهنمایی: دست‌کم ۲۱ حالت بار را در نظر بگیرید. می‌توانید $E_C = ۱$ را به‌عنوان واحد انرژی انتخاب کنید.

۲. فرض کنید در نقطهٔ شیرین

$$n_g = \frac{۱}{۲}$$

کار می‌کنیم. ناهماهنگی نسبی

$$\delta_r = \frac{E_{۱۲} - E_{۰۱}}{E_{۰۱}}, \qquad E_{ij} = E_j - E_i,$$

را برحسب

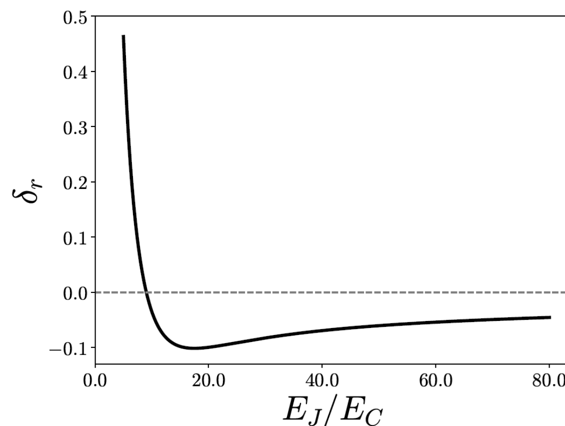
$$E_J/E_C \in [۵, ۸۰]$$

رسم کنید. وقتی نسبت E_J/E_C را افزایش می‌دهید، چه اتفاقی می‌افتد؟

پاسخ تمرین ۱.۲.۴

۱. شکل ؟؟ را ببینید.

۲. نمودار در شکل ۴-۵ نشان داده شده است. در حد بزرگ E_J/E_C، ناهماهنگی از سمت مقدارهای منفی به صفر نزدیک می‌شود. این یعنی سیستم هرچه بیشتر مانند یک نوسانگر هماهنگ رفتار می‌کند.



شکل ۴-۵: ناهماهنگی نسبی CPB برحسب E_J/E_C، در $n_g = ۱/۲$ و $n_\alpha = ۰$، برای هامیلتونی داده‌شده در معادله (۴-۳۰).

۴-۳ تحریک یک کیوبیت ترنسمون

یک CPB را مانند شکل ۴-۱ در نظر می‌گیریم؛ با این تفاوت که اکنون منبع ولتاژ $v_g \to v_d(t)$ وابسته به زمان است. سیستم از طریق یک ظرفیت $C_g \to C_d$ به این منبع کوپل شده است. با فرض این‌که CPB در رژیم ترانسمون کار می‌کند و با انجام تقریب‌هایی که در بخش ۴-۲ توضیح دادیم، هامیلتونی زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{H(t)}{\hbar} = \Omega\hat{b}^\dagger\hat{b} + \frac{\delta}{۲}\hat{b}^\dagger\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{b} + i\varepsilon_d(t)\left(\hat{b}^\dagger - \hat{b}\right), \qquad (۴\text{-}۴۴)$$

که در آن تعریف کرده‌ایم:

$$\varepsilon_d(t) = ۴\frac{E_C}{\hbar}\left(\frac{E_J}{۲E_C}\right)^{۱/۴}\frac{C_d v_d(t)}{۲e}. \qquad (۴\text{-}۴۵)$$

برای تحریک گذارها بین حالت پایه و نخستین حالت برانگیخته، در حالت ایده‌آل به یک رانش با یک فرکانس منفرد Ω_d نیاز داریم. بنابراین، یک رانش ولتاژی به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

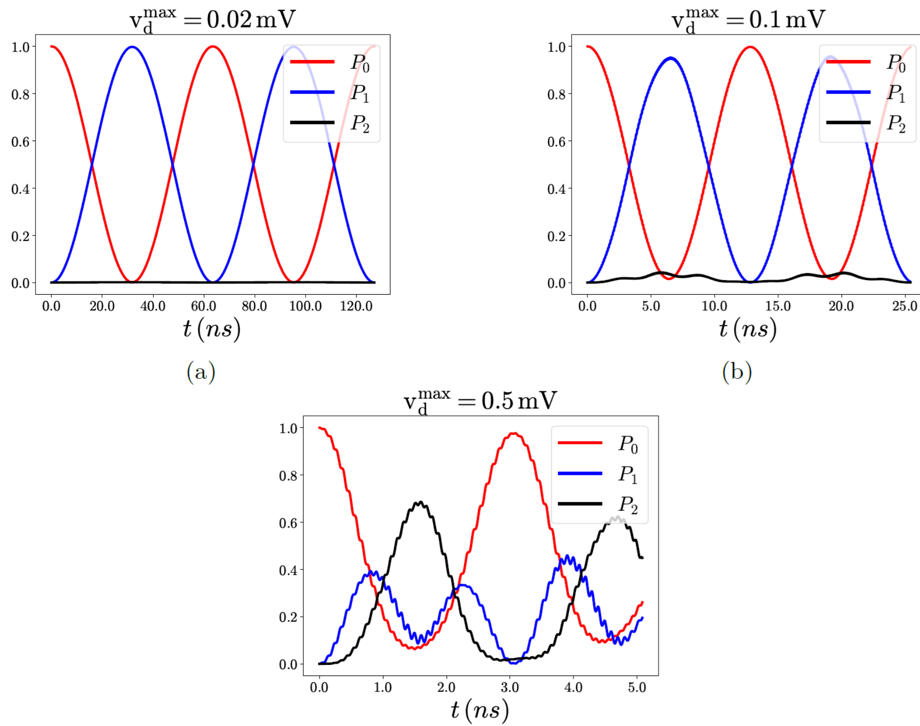
$$v_d(t) = v_d^{\max}\cos(\Omega_d t). \qquad (۴\text{-}۴۶)$$

در این حالت، به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$\frac{H(t)}{\hbar} = \Omega\hat{b}^\dagger\hat{b} + \frac{\delta}{۲}\hat{b}^\dagger\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{b} + \frac{i}{۲}\mathcal{E}\left(e^{i\Omega_d t} + e^{-i\Omega_d t}\right)\left(\hat{b}^\dagger - \hat{b}\right), \qquad (۴\text{-}۴۷)$$

که در آن

$$\mathcal{E} = \varepsilon_d(۰).$$



شکل ۴-۶: کیوبیت ترانسمونِ رانده‌شده. ما ترانسمون را به‌صورت یک نوسانگر Duffing با فرکانس $\Omega/2\pi = 5$ GHz و ناهماهنگی $\delta/2\pi = -300$ MHz تقریب می‌زنیم. ترانسمون از طریق ظرفیت $C_d = 0.1$ fF به خط رانش کوپل شده است. ترانسمون را در حالت پایه $|0\rangle$ مقداردهی اولیه می‌کنیم و آن را با یک رانش تشدیدی به شکلی که در معادله (۴-۴۶) داده شده است، تحریک می‌کنیم. نمودارها احتمال‌های P_0، P_1 و P_2 را برای یافتن سیستم به‌ترتیب در حالت‌های $|0\rangle$، $|1\rangle$ و $|2\rangle$ برحسب زمان نشان می‌دهند. مشاهده می‌شود که با افزایش بیشینهٔ ولتاژ $v_d^{\max}$، احتمال نشت از زیرفضای محاسباتی، یعنی پر شدن حالت $|2\rangle$، همان‌طور که انتظار می‌رود افزایش می‌یابد. در عمل، این موضوع یک کران پایین برای زمان گیت‌های تک‌کیوبیتی تعیین می‌کند که دست‌کم به حدود ۱۰–۲۰ ns محدود می‌شوند. همچنین برای مقدارهای بزرگ v_d، نوسان‌های کوچک و سریعی در منحنی‌ها دیده می‌شود که ناشی از جمله‌های با نوسان سریع در معادله (۴-۴۹) است.

اکنون یک بررسی کوتاه در تصویر برهم‌کنش انجام می‌دهیم و هامیلتونی $H_0 = \hbar\Omega\hat{b}^\dagger\hat{b}$ را به‌عنوان هامیلتونی مرجع در نظر می‌گیریم. به بیان دیگر، به چارچوب چرخان نوسانگر با فرکانس Ω می‌رویم. هامیلتونی در تصویر برهم‌کنش، برای مثال با مراجعه به فصل ۳ در [۷۰] یا تمرین ۴-۳، برابر است با:

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{H}(t)}{\hbar} &= \frac{1}{\hbar}\left[e^{iH_0t/\hbar}H(t)e^{-iH_0t/\hbar} - H_0\right]\\ &= \frac{\delta}{2}\hat{b}^\dagger\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{b} + \frac{i}{2}\mathcal{E}\left(e^{i(\Omega-\Omega_d)t}\hat{b}^\dagger - e^{-i(\Omega-\Omega_d)t}\hat{b}\right)\\ &\quad + \frac{i}{2}\mathcal{E}\left(e^{i(\Omega+\Omega_d)t}\hat{b}^\dagger - e^{-i(\Omega+\Omega_d)t}\hat{b}\right).\end{aligned} \tag{۴-۴۸}$$

اگر $\Omega_d = \Omega$ باشد، به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\tilde{H}(t)}{\hbar} = \frac{\delta}{2}\hat{b}^\dagger\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{b} + \frac{i}{2}\mathcal{E}\left(\hat{b}^\dagger - \hat{b}\right) + \frac{i}{2}\mathcal{E}\left(e^{i2\Omega t}\hat{b}^\dagger - e^{-i2\Omega t}\hat{b}\right). \tag{۴-۴۹}$$

می‌بینیم که در این تصویر، جملهٔ آخر رانش با فرکانسی که دو برابر فرکانس کیوبیت است، به‌سرعت نوسان می‌کند. این یعنی اثر آن، ایجاد نوسان‌های کوچک اما سریع در دامنه‌های گذار است؛ نوسان‌هایی که در تقریب اول

می‌توان آن‌ها را نادیده گرفت. البته برای رانش‌های قوی، می‌توان به جمله‌های مرتبهٔ بعدی در بسط مگنوس Magnus expansion رفت؛ برای نمونه به [۶۷] مراجعه کنید. این کار به جابه‌جایی معروف Bloch-Siegert shift در فرکانس کیوبیت منجر می‌شود.

اگر بیشتر تقریب بزنیم و تکامل سیستم را به زیرفضای محاسباتی تعریف‌شده توسط دو تراز اول محدود کنیم، به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$\frac{\tilde{H}_q}{\hbar} = \frac{\mathcal{E}}{۲} Y. \tag{۵۰-۴}$$

بنابراین، هامیلتونی رانش در تصویر برهم‌کنش باعث چرخش‌هایی حول محور Y روی کرهٔ بلوخ می‌شود. با انتخاب فاز متفاوت برای رانش، یعنی در نظر گرفتن $\varepsilon_d(t) = \mathcal{E}\cos(\Omega_d t + \theta)$، می‌توان محور چرخش دلخواهی را در صفحهٔ $X - Y$ کرهٔ بلوخ انتخاب کرد. با این حال، اگر نسبت بین ناهماهنگی و توان رانش $|\delta_r/\mathcal{E}|$ به‌اندازهٔ کافی بزرگ نباشد، تقریب کیوبیتی قبلی معتبر نخواهد بود و سیستم می‌تواند به حالت‌های محاسباتی بالاتر مانند $\langle ۲|$، $\langle ۳|$ و غیره نشت کند. این یعنی ناهماهنگی، دامنهٔ رانش و در نتیجه سرعت گیت را در کیوبیت‌های ترانسمون محدود می‌کند. این موضوع را به‌صورت صریح در شکل ۴-۶ می‌بینیم. در عمل، نشت در طول گیت‌های تک‌کیوبیتی با طراحی دقیق شکل پالس کاهش می‌یابد؛ برای مثال با استفاده از تکنیک DRAG [۷۱]. این روش امکان دستیابی به زمان‌های گیت تک‌کیوبیتی در حد چند نانوثانیه را فراهم می‌کند، با نرخ خطای $۱۰^{-۳}$ یا کمتر، بدون نشت شدیدی که در شکل ؟؟ مشاهده می‌کنیم.

تمرین ۱.۳.۴: چارچوب چرخان یا تصویر برهم‌کنش

یک روش رایج برای تحلیل و عملکرد در محاسبات کوانتومی این است که دینامیک کیوبیت‌ها یا نوسانگرها را در یک چارچوب مرجع چرخان بررسی کنیم؛ چارچوبی که در آن بخشی از تکامل آزاد سیستم حذف می‌شود. یک سیستم کوانتومی با هامیلتونی H را در نظر بگیرید که دینامیک آن طبق معادلهٔ شرودینگر–فون‌نویمان داده می‌شود:

$$i\hbar\frac{d|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|}{dt} = \left[H, |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|\right]. \tag{۵۱-۴}$$

اگر یک هامیلتونی مرجع مستقل از زمان H_{ref} داشته باشیم که یک تبدیل یکانی

$$U_{\text{ref}} = e^{-iH_{\text{ref}}t/\hbar}$$

تولید می‌کند، نشان دهید که بردار حالت

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = U_{\text{ref}}^{\dagger}|\psi(t)\rangle$$

طبق معادلهٔ شرودینگر با هامیلتونی چارچوب چرخان یا تصویر برهم‌کنش $\tilde{H}$ تکامل می‌یابد که به‌صورت زیر داده می‌شود:

$$\tilde{H} = U_{\text{ref}}^{\dagger} H U_{\text{ref}} + i\hbar\frac{dU_{\text{ref}}^{\dagger}}{dt}U_{\text{ref}} = U_{\text{ref}}^{\dagger} H U_{\text{ref}} - H_{\text{ref}}. \tag{۵۲-۴}$$

اگر $H = H_۰ + V(t)$ و $H_{\text{ref}} = H_۰$ باشد، آنگاه $\tilde{H}$ چیست؟ در اینجا $H_۰$ می‌تواند هامیلتونی مجموعه‌ای از کیوبیت‌ها و نوسانگرهای کوپل‌نشده باشد و $V(t)$ یک کوپلینگ باشد که برای ایجاد دینامیک کیوبیتی در محاسبات استفاده می‌شود.

پاسخ تمرین ۱.۳.۴

داریم:

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{d|\tilde{\psi}(t)\rangle\langle\tilde{\psi}(t)|}{dt} &= i\hbar\frac{dU^\dagger_{\text{ref}}}{dt}|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|U_{\text{ref}} \\ &+ i\hbar U^\dagger_{\text{ref}}|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|\frac{dU_{\text{ref}}}{dt} \\ &+ U^\dagger_{\text{ref}}\left[H, |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|\right]U_{\text{ref}} \\ &= \left[i\hbar\frac{dU^\dagger_{\text{ref}}}{dt}U_{\text{ref}} + U^\dagger_{\text{ref}}HU_{\text{ref}},\, |\tilde{\psi}(t)\rangle\langle\tilde{\psi}(t)|\right]. \end{aligned} \tag{۵۳-۴}$$

در این نتیجه، از وارد کردن $U_{\text{ref}}U^\dagger_{\text{ref}} = ۱$، معادلهٔ شرودینگر-فون‌نویمان، و رابطهٔ

$$i\hbar U^\dagger_{\text{ref}}\frac{dU_{\text{ref}}}{dt} = H_{\text{ref}}$$

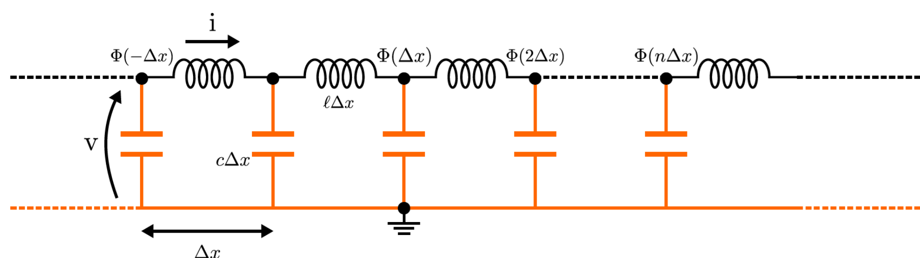
استفاده کرده‌ایم. بنابراین، هامیلتونی چارچوب چرخان برابر است با:

$$\tilde{H} = e^{iH.t/\hbar}V(t)e^{-iH.t/\hbar}.$$

۴-۴ خطوط انتقال و رزوناتورهای هم‌صفحه‌ای

در این بخش، روش ریاضی بررسی خطوط انتقال و رزوناتورهای هم‌صفحه‌ای co-planar resonators را بررسی می‌کنیم. مورد اول، یعنی خطوط انتقال، برای ورودی و خروجی مایکروویوی روی تراشه استفاده می‌شوند؛ در حالی که مورد دوم، یعنی رزوناتورهای هم‌صفحه‌ای، برای کوپل کردن کیوبیت‌ها، ذخیره‌سازی اطلاعات کوانتومی و انجام اندازه‌گیری‌های کیوبیتی به‌کار می‌روند. چند تصویر از این ساختارها و کیوبیت‌های ترانسمون در شکل‌های ۴-۲، ۴-۸، ۴-۹ و ۴-۱۱ نشان داده شده‌اند.

علاوه بر رزوناتورهای هم‌صفحه‌ای، کاواک‌های مایکروویوی سه‌بعدی با ضریب کیفیت بسیار بالا high-Q 3D microwave cavities نیز به‌طور گسترده در الکترودینامیک کوانتومی مداری circuit QED استفاده می‌شوند [۷۲]. برای مدل‌سازی مدهای ویژه و ساختار متناظر میدان الکتریکی درون این کاواک‌ها، به‌جای نظریهٔ مدار، از شبیه‌سازی‌های الکترومغناطیسی اجزای محدود finite-element electromagnetic simulations، با نرم‌افزارهایی مانند Ansys یا COMSOL، استفاده می‌شود [۷۳]. در فصل ؟؟ دوباره به این موضوع بازمی‌گردیم و توضیح می‌دهیم که چگونه می‌توان از این مدل‌سازی به‌عنوان ورودی برای ساختن یک هامیلتونی استفاده کرد.



شکل ۴-۷: مدل گسستهٔ یک خط انتقال نامتناهی.

یک مدل گسسته از یک خط انتقالِ بی‌نهایت و بی‌اتلاف را در نظر بگیرید که ظرفیت واحد طول آن با c (نه سرعت نور!) و اندوکتانس واحد طول آن با ℓ نشان داده می‌شود؛ همان‌گونه که در شکل ۴-۷ آمده است. اکنون روش کوانتیزه‌سازی مدار را بر این مدار اعمال می‌کنیم.

اگر درخت پوشا spanning tree که در شکل ۴-۷ با رنگ نارنجی مشخص شده است را انتخاب کنیم، می‌توانیم مطابق دستور استاندارد، لاگرانژی این مدار را بنویسیم. لاگرانژی مدار گسسته برحسب شارهای گره‌ای به‌صورت زیر است:

$$\mathcal{L} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c\Delta x}{۲}\, \dot{\Phi}(k\Delta x, t)^{۲} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{۱}{۲\ell\Delta x} \left[\Phi((k+۱)\Delta x, t) - \Phi(k\Delta x, t)\right]^{۲}. \qquad (۵۴\text{-}۴)$$

در حد $\Delta x \to ۰$ می‌توان مجموعهٔ شارها $\{\Phi(k\Delta x, t)\},\ k \in \mathbb{Z}$ را عملاً به‌صورت یک میدان $\Phi(x,t)$ نمایش داد، و

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \Delta x\, f(k\Delta x) \to \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x).$$

در حد $\Delta x \to ۰$، لاگرانژی یک میدان اسکالر یک‌بعدیِ کلاین–گوردون $\Phi(x,t)$ به‌دست می‌آید؛ یعنی:

$$\mathcal{L} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \mathfrak{L}(\partial_x\Phi(x,t), \partial_t\Phi(x,t)), \qquad (۵۵\text{-}۴)$$

که در آن چگالی لاگرانژی برابر است با

$$\mathfrak{L}(\partial_x\Phi(x,t), \partial_t\Phi(x,t)) = \frac{c}{۲}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^{۲} - \frac{۱}{۲\ell}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^{۲}. \qquad (۵۶\text{-}۴)$$

از دید فیزیکی، جریان در هر شاخهٔ سلفی با شار شاخه متناسب است و بنابراین در این حد به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$i(x,t) = -\frac{۱}{\ell}\frac{\partial\Phi}{\partial x}. \qquad (۵۷\text{-}۴)$$

طبق تعریف، بنگرید به معادله (۲-۱)، ولتاژ در طول خط از مشتق زمانی شار به‌دست می‌آید؛ یعنی:

$$v(x,t) = \frac{\partial\Phi}{\partial t}. \qquad (۵۸\text{-}۴)$$

معادلات اویلر–لاگرانژ برای یک میدان اسکالر کلی $\Phi(x,t)$ (برای مثال، به مشتق‌گیری معادله (؟؟) در تمرین ؟؟ مراجعه کنید) به‌صورت زیر هستند:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_t\Phi)}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_x\Phi)}\right) - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi} = ۰, \qquad (۵۹\text{-}۴)$$

و این رابطه به معادلهٔ زیر منجر می‌شود:

$$\frac{\partial^{۲}\Phi}{\partial t^{۲}} - v_p^{۲}\frac{\partial^{۲}\Phi}{\partial x^{۲}} = ۰. \qquad (۶۰\text{-}۴)$$

این همان معادلهٔ موج یک‌بعدی با سرعت فاز

$$v_p = \frac{۱}{\sqrt{\ell c}} \qquad (۶۱\text{-}۴)$$

است.

برای یک رزوناتور خط انتقال هم‌صفحه‌ای روی زیرلایهٔ سیلیکونی، معمولاً

$$v_p \approx \frac{c}{۲,۵},$$

که در اینجا c سرعت نور است.

از معادلات (۴-۵۷) و (۴-۵۸) و نیز از خودِ معادلهٔ موج، به‌سادگی می‌توان دید که:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\ell \frac{\partial i}{\partial t}, \qquad \frac{\partial i}{\partial x} = -c \frac{\partial v}{\partial t}. \tag{۴-۶۲}$$

این‌ها با نام معادلات تلگراف Telegrapher's equations شناخته می‌شوند [۷۴]. با بازنویسی معادلهٔ موج به‌صورت

$$\left(\partial_t - v_p \partial_x\right)\left(\partial_t + v_p \partial_x\right) \Phi(x,t) = ۰, \tag{۴-۶۳}$$

متوجه می‌شویم که جواب‌های معادلات انتقال

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \pm v_p \frac{\partial \Phi}{\partial x} = ۰ \tag{۴-۶۴}$$

نیز جواب معادلهٔ موج هستند. این جواب‌ها شامل جواب‌های منتشرشونده به راست

$$\Phi^{\rightarrow}(x,t) = \Phi^{\rightarrow}\left(t - \frac{x}{v_p}\right)$$

و جواب‌های منتشرشونده به چپ

$$\Phi^{\leftarrow}(x,t) = \Phi^{\leftarrow}\left(t + \frac{x}{v_p}\right)$$

هستند؛ به‌ترتیب زمانی که علامت وسط در معادله (۴-۶۴) مثبت یا منفی باشد. جواب کلی $\Phi(x,t)$ نیز، به دلیل خطی بودن، ترکیب خطی‌ای از $\Phi^{\rightarrow}(x,t)$ و $\Phi^{\leftarrow}(x,t)$ است.

در قیاس با معادلات (۴-۵۷) و (۴-۵۸)، می‌توان جریان‌ها و ولتاژهای منتشرشونده به راست و چپ را به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$i^{\rightarrow}(x,t) = -\frac{۱}{\ell}\frac{\partial \Phi^{\rightarrow}}{\partial x}, \qquad i^{\leftarrow}(x,t) = -\frac{۱}{\ell}\frac{\partial \Phi^{\leftarrow}}{\partial x}, \tag{۴-۶۵آ}$$

$$v^{\rightarrow}(x,t) = \frac{\partial \Phi^{\rightarrow}}{\partial t}, \qquad v^{\leftarrow}(x,t) = \frac{\partial \Phi^{\leftarrow}}{\partial t}. \tag{۴-۶۵ب}$$

با استفاده از معادلات (۴-۵۷) و (۴-۵۸)، معادله (۴-۶۴) نتیجه می‌دهد که

$$v^{\rightarrow}(x,t) = Z_{۰}\, i^{\rightarrow}(x,t), \qquad v^{\leftarrow}(x,t) = -Z_{۰}\, i^{\leftarrow}(x,t), \tag{۴-۶۶}$$

که در آن امپدانس مشخصهٔ خط انتقال را به‌صورت

$$Z_{۰} = \sqrt{\frac{\ell}{c}}$$

تعریف کرده‌ایم. این امپدانس مشخصه برای خطوط انتقال متداول، برابر $۵۰\ \Omega$ است و به ویژگی‌های هندسی رسانای مرکزی و فاصلهٔ آن تا رسانای بیرونی بستگی دارد [۷۴].

توان منتقل‌شده در خط انتقال به‌صورت زیر داده می‌شود:

$$P(x,t) = v^{\rightarrow}(x,t)i^{\rightarrow}(x,t) + v^{\leftarrow}(x,t)i^{\leftarrow}(x,t) = \frac{۱}{Z_۰}\left[(v^{\rightarrow})^۲ - (v^{\leftarrow})^۲\right], \tag{۴-۶۷}$$

که شامل سهم‌های مربوط به شار انرژیِ جاری به چپ و راست است.

یک جواب حقیقیِ کلی برای معادلهٔ موج را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\Phi(x,t) = \Phi^{\rightarrow}(x,t) + \Phi^{\leftarrow}(x,t) = \sqrt{\frac{\hbar}{۴\pi c}}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\,\frac{۱}{\sqrt{\omega(k)}}\left(b_k e^{-i\omega(k)t+ikx} + b_k^* e^{i\omega(k)t-ikx}\right), \tag{۴-۶۸}$$

که در آن فرکانس زاویه‌ای $\omega(k) = v_p|k|$، عدد موج k، و ضرایب مختلط b_k هستند. در اینجا چند ضریب پیش‌عاملی را خارج کرده‌ایم تا ضریب مختلط b_k همان بُعد $k^{-۱/۲}$ را داشته باشد.

در نتیجه، میدان منتشرشونده به راست که با $k > ۰$ مرتبط است، به‌صورت زیر است:

$$\Phi^{\rightarrow}(x,t) = \sqrt{\frac{\hbar}{۴\pi c}}\int_{۰}^{+\infty} dk\,\frac{۱}{\sqrt{\omega(k)}}\left(b_k e^{-i\omega(k)(t-x/v_p)} + \text{c.c.}\right), \tag{۴-۶۹}$$

در حالی که میدان منتشرشونده به چپ که با $k < ۰$ مرتبط است، برابر است با:

$$\Phi^{\leftarrow}(x,t) = \sqrt{\frac{\hbar}{۴\pi c}}\int_{-\infty}^{۰} dk\,\frac{۱}{\sqrt{\omega(k)}}\left(b_k e^{-i\omega(k)(t+x/v_p)} + \text{c.c.}\right). \tag{۴-۷۰}$$

کوانتیزه‌سازی بوزونی به این معناست که بخش حقیقی و موهومی یک عدد مختلط را با امیدریاضی دو عملگر هرمیتیِ مزدوج جایگزین کنیم. به بیان دیگر، برای هر $k \in \mathbb{R}$ داریم:

$$b_k \to \hat{b}_k, \qquad b_k^* \to \hat{b}_k^{\dagger}, \qquad [\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}^{\dagger}] = \delta(k-k')\,۱, \qquad [\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}] = ۰. \tag{۴-۷۱}$$

از این تعریف دوباره می‌بینیم که $\hat{b}_k$، و در نتیجه b_k، همان بُعد $k^{-۱/۲}$ را دارد، زیرا تابع دلتا دارای بُعد $k^{-۱}$ است.

هامیلتونی کلاسیکی نیز به‌سادگی با تعریف میدان مزدوج

$$Q(x,t) = \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_t\Phi)} = c\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial t}, \tag{۴-۷۲}$$

به‌دست می‌آید؛ کمیتی که از دید فیزیکی بار بر واحد طول را نمایش می‌دهد. این موضوع به هامیلتونی کلاسیکی زیر منجر می‌شود:

$$\mathcal{H} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, Q(x,t)\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial t} - \mathcal{L} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\left[\frac{Q^۲(x,t)}{۲c} + \frac{۱}{۲\ell}\left(\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial x}\right)^۲\right]. \tag{۴-۷۳}$$

هامیلتونی کلاسیکی، انرژی را در یک آرایش میدانی در یک لحظهٔ معین از زمان، با استفاده از وابستگی زمانی صریحِ $Q(x,t)$ و $\Phi(x,t)$، بیان می‌کند. از آنجا که انرژی پایسته است، این کمیت البته مستقل از زمان است. اگر سیستم را کوانتیزه کنیم، میدان وابسته به زمان $\Phi(x,t)$ نمایانگر عملگر $\hat{\Phi}(x)$ در نمایش هایزنبرگ خواهد بود که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{\Phi}(x) = \sqrt{\frac{\hbar}{۴\pi c}}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\,\frac{۱}{\sqrt{\omega(k)}}\left(\hat{b}_k e^{ikx} + \hat{b}_k^{\dagger} e^{-ikx}\right). \tag{۴-۷۴}$$

به‌طور مشابه، عملگر بار کوانتیزه‌شده $\hat{Q}(x)$ را می‌توان با استفاده از رابطهٔ کلاسیکِ معادله (۴-۷۲) و سپس حذف وابستگی زمانی، به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$\hat{Q}(x) = \sqrt{\frac{\hbar c}{۴\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \sqrt{\omega(k)} \left(-i\hat{b}_k e^{ikx} + i\hat{b}_k^\dagger e^{-ikx}\right). \qquad (۴\text{-}۷۵)$$

در واقع، اگر هامیلتونی کوانتیزه‌شدهٔ H همان باشد که در معادله (۴-۷۷) در تمرین ۴-۴ آمده است، آنگاه عملگرهای هایزنبرگ وابستگی زمانی زیر را دارند:

$$\hat{b}(k,t) = e^{iHt/\hbar}\hat{b}_k e^{-iHt/\hbar} = \hat{b}_k e^{-i\omega(k)t}, \qquad \hat{b}^\dagger(k,t) = \hat{b}_k^\dagger e^{i\omega(k)t}. \qquad (۴\text{-}۷۶)$$

تکامل هایزنبرگی یک عملگر بوزونی به‌صورت صریح در معادله (۴-۱۳۴) در تمرین ۴-۶ بررسی خواهد شد.

تمرین ۴.۴.۱: خط انتقال بی‌نهایت کوانتیزه‌شده

۱. نشان دهید که اگر کوانتیزه‌سازی را بر هامیلتونی کلاسیکِ معادله (۴-۷۳) اعمال کنیم، یعنی $b_k \to \hat{b}_k$ و $b_k^* \to \hat{b}_k^\dagger$، آنگاه هامیلتونی کوانتیزه‌شدهٔ H واقعاً به‌صورت زیر خواهد بود:

$$H = \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \hbar\omega(k) \left(\hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k + \frac{\delta(۰)}{۲}\right). \qquad (۴\text{-}۷۷)$$

می‌توانید این کار را با جایگذاری عملگرهای $\hat{\Phi}(x)$ و $\hat{Q}(x)$ در نسخهٔ کوانتیزهٔ (مستقل از زمانِ) H از $\mathcal{H}$ در معادله (۴-۷۳) انجام دهید. به‌دلیل حضور تابع دلتای دیراک $\delta(۰)$، انرژی خلأ اصولاً بی‌نهایت است.

۲. نشان دهید که

$$[\hat{\Phi}(x), \hat{Q}(x')] = i\hbar\delta(x-x')\,۱, \qquad (۴\text{-}۷۸)$$

با استفاده از عبارت‌های $\hat{Q}(x)$ و $\hat{\Phi}(x)$ در معادلات (۴-۷۴) و (۴-۷۵). یعنی نشان دهید که این‌ها، همان‌طور که انتظار می‌رود، روابط جابه‌جاییِ کانونی را ارضا می‌کنند.

پاسخ تمرین ۴.۴.۱

۱. از رابطهٔ

$$\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{i(k-k')x} = \delta(k-k'),$$

و

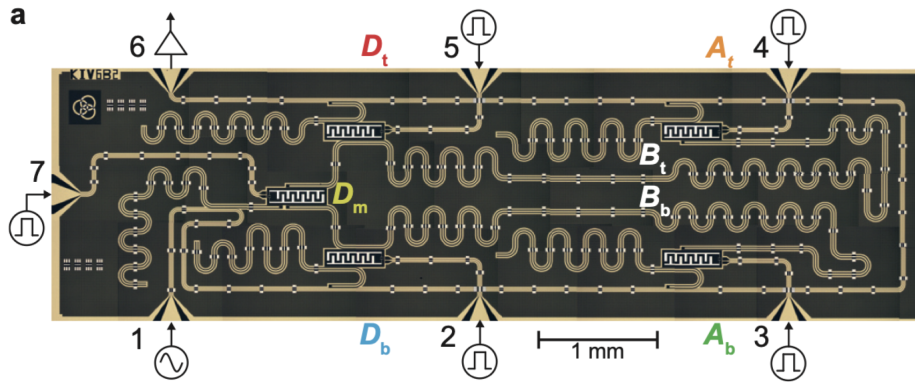
$$\omega(k) = v_p|k| = \frac{۱}{\sqrt{\ell c}}|k|,$$

و همچنین از روابط جابه‌جایی در معادله (۴-۷۱) استفاده کنید.

۲. از روابط جابه‌جاییِ معادله (۴-۷۱) و رابطهٔ

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \left(e^{ik(x-x')} + e^{-ik(x-x')}\right) = ۴\pi\delta(x-x') \qquad (۴\text{-}۷۹)$$

استفاده کنید.



شکل ۴-۸: ریزنگارهٔ نوری با رنگ کاذب ازریزنگارهٔ نوری از یک تراشهٔ پنج‌کیوبیتی ترانسمونی از Ref. [82]؛ این شکل از نسخهٔ arXiv مقاله برداشته شده است. در تصویر، یک خط انتقال AC مالتی‌پلکس‌شده دیده می‌شود که از نقاط ۱ و ۶ وارد تراشه شده و از آن خارج می‌شود. همچنین پنج خط شار DC مجزا دیده می‌شوند که هرکدام یک کیوبیت را کنترل می‌کنند. این تراشه شامل سه کیوبیت دادهٔ ترانسمونی (D_t, D_m, D_b)، دو کیوبیت کمکی ترانسمونی (A_t, A_b)، و دو رزوناتور گذرگاه کوپل‌کننده (B_t, B_b) است که هر کیوبیت کمکی را به دو کیوبیت داده کوپل می‌کنند. علاوه بر این، هر کیوبیت رزوناتور بازخوانی مخصوص به خود را دارد.

۴-۴-۱ مرزها و رزوناتورها

اگر خط انتقال را واقعاً بتوان بی‌نهایت مدل کرد، می‌بینیم که هر $k \in \mathbb{R}$ مجاز است و جواب‌ها موج‌های تختِ رونده‌ای هستند که با عدد موج k مشخص می‌شوند. به هرکدام از این موج‌ها می‌توان یک مد بوزونی با عملگر نابودی $\hat{b}_k$ نسبت داد. در این سناریو، نسبت دادن یک عملگر نابودی منفرد به یک فرکانس $\omega = v_p|k|$ نادرست است؛ زیرا دو عملگر مد متفاوت، $\hat{b}_k$ و $\hat{b}_{-k}$، وجود دارند که فرکانس یکسانی دارند.

اکنون یک خط انتقال نیمه‌بی‌نهایت را در نظر بگیرید که در یک جهت تا بی‌نهایت ادامه دارد، اما در $x = ۰$ شرط مرزی مدار باز دارد؛ یعنی:

$$i(x = ۰, t) = -\frac{۱}{\ell} \left.\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right|_{x=۰} = ۰.$$

می‌بینیم که اگر در معادله (۴-۶۸) انتخاب کنیم $b_{-k} = -b_k$ و بنابراین $b^*_{-k} = -b^*_k$، آنگاه برای هر $k \in \mathbb{R}$، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \Phi_k(x,t) &= b_k \left[e^{-i\omega(k)t+ikx} - e^{-i\omega(k)t-ikx}\right] + b^*_k \left[e^{i\omega(k)t-ikx} - e^{i\omega(k)t+ikx}\right] \\ &= -۲i\cos(kx)\left(b_k e^{-i\omega(k)t} - b^*_k e^{i\omega(k)t}\right), \end{aligned} \tag{۴-۸۰}$$

که جوابی است که این شرط مرزی را ارضا می‌کند. اگر این سیستم را کوانتیزه کنیم، یک عملگر $\hat{b}_k$ را به نسبت b_k می‌دهیم، اما b_{-k} صرفاً با $-\hat{b}_k$ جایگزین می‌شود. بنابراین، می‌توانیم عدد موج k را با فرکانس زاویه‌ای جایگزین کنیم، زیرا در هر فرکانس فقط یک مد وجود دارد.

از نظر فیزیکی، این یعنی مدی که با دامنهٔ a به سمت راست و به‌سوی $x = ۰$ حرکت می‌کند، در این مرز به‌طور کامل بازتاب می‌شود و با دامنهٔ منفی $-a$ به سمت چپ ادامه می‌یابد. همچنین می‌توانیم یک خط انتقال نیمه‌بی‌نهایت را در نظر بگیریم که در $x = ۰$ زمین شده است؛ یعنی:

$$v(x = ۰, t) = ۰.$$

در این حالت، هر جوابی با $b_k = b_{-k}$ معتبر است. از نظر فیزیکی، این یعنی موج بازتاب‌شده در این مرز تغییر فاز -۱ نمی‌گیرد، بلکه دامنهٔ خود را حفظ می‌کند.

اگر به‌جای آن، خط انتقال طول متناهی داشته باشد، باید در دو انتهای آن شرط‌های مرزی مناسبی اعمال کنیم. در این حالت، مجموعهٔ جواب‌های ممکن که با k برچسب‌گذاری می‌شوند، گسسته می‌شود و به مدهای تشدیدی متناظر خواهد بود. رایج‌ترین شرط‌های مرزی در یک نقطهٔ مرزی x_b، شرط مرزی مدار باز $i(x_b, t) = ۰$ و شرط مرزی اتصال کوتاه $v(x_b, t) = ۰$ هستند. خط انتقالی که در هر دو انتها شرط مرزی مدار باز داشته باشد، رزوناتور $\lambda/۲$ نامیده می‌شود؛ زیرا پایین‌ترین بردار موج گسسته $k = ۲\pi/\lambda$ با طول موج $\lambda = ۲d$ متناظر است، که در آن d طول خط است. برای جزئیات بیشتر، تمرین ۴-۴-۱ را ببینید.

اگر یک خط انتقال را با یک مرز زمین‌شده در یک انتها و یک مدار باز در انتهای دیگر خاتمه دهیم، یک رزوناتور موسوم به $\lambda/۴$ به‌دست می‌آید. طول خط انتقال را d در نظر بگیرید. ابتدا، شرط مرزی زمین‌شده، جواب‌های کلاسیکی را به فرم کلی زیر محدود می‌کند:

$$\Phi(x,t) = \sqrt{\frac{\hbar}{۴\pi c}} \int_{۰}^{+\infty} dk\, \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\omega(k)}} \left(b_k e^{-i\omega(k)t} + b_k^* e^{i\omega(k)t} \right). \qquad (۴\text{-}۸۱)$$

سپس شرط

$$i(x=d,t) = -\frac{۱}{\ell} \left.\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right|_{x=d} = ۰$$

نتیجه می‌دهد که k باید به‌گونه‌ای محدود شود که

$$\cos(kd) = ۰,$$

یا به‌عبارت دیگر:

$$kd = \frac{\pi}{۲} + n\pi, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

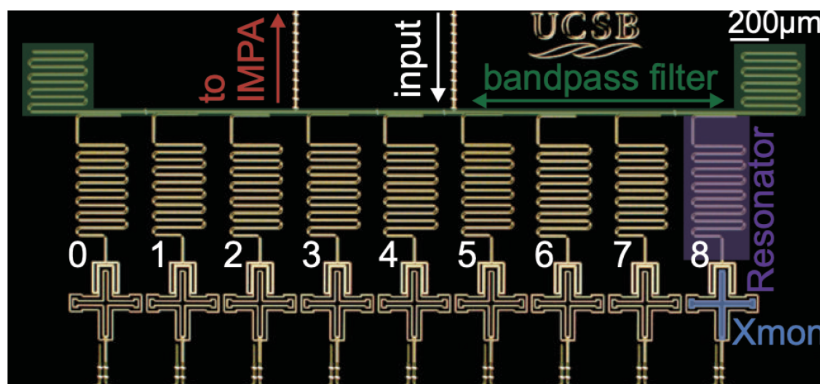
در نتیجه، فرکانس‌های زاویه‌ای مجاز برابرند با:

$$\omega_n = \frac{v_p \pi}{۲d} + \frac{v_p n\pi}{d}. \qquad (۴\text{-}۸۲)$$

بنابراین، بزرگ‌ترین طول موج پشتیبانی‌شده، یعنی مد با کمترین انرژی، برابر است با:

$$\lambda = ۴d.$$

هر دو نوع رزوناتور هم‌صفحه‌ای $\lambda/۴$ و $\lambda/۲$ می‌توانند استفاده شوند، و معمولاً در توصیف، همهٔ مدها به‌جز یک مد حذف می‌شوند؛ یعنی همان مدی که فرکانس آن به کیوبیت‌های کوپل‌شدهٔ مورد نظر نزدیک‌تر است. رزوناتور هم‌صفحه‌ای می‌تواند به یک کیوبیت ترانسمون کوپل شود، همان‌طور که در بخش ۴-۶ بررسی خواهد شد. همچنین وقتی این رزوناتور به‌عنوان رزوناتور بازخوانی استفاده می‌شود، خودِ آن به یک خط تغذیهٔ انتقالی کوپل می‌شود؛ شکل ۴-۹ و شکل ۴-۸ را ببینید.



شکل ۴-۹: ریزنگارهٔ نوری با رنگ کاذب از [۷۵]، شامل نه کیوبیت ترانسمون از نوع Xmon که هرکدام دارای رزوناتور بازخوانی $\lambda/۲$ هستند. همهٔ این رزوناتورها به یک خط انتقال مشترک از نوع feed در بالای تراشه کوپل شده‌اند. معماری‌های صنعتی کیوبیت‌های ابررسانا می‌توانند از ساختار ساندویچی شامل دو تراشهٔ جداگانه اما کوپل‌شده استفاده کنند؛ برای مثال، یک تراشه شامل کیوبیت‌ها و کوپلرهای قابل‌تنظیم باشد و تراشهٔ دیگر، یعنی تراشهٔ کنترل، شامل رزوناتورهای بازخوانی و خطوط ورودی/خروجی I/O باشد. چنین معماری‌ای امکان مقیاس‌پذیری چندکیوبیتی را در صفحهٔ دوبعدی فراهم می‌کند؛ برای نمونه، به تراشهٔ Sycamore گوگل که در YouTube توضیح داده شده است، مراجعه کنید.

همچنین می‌توانیم خطوط انتقال نیمه‌بی‌نهایتی را در نظر بگیریم که با یک شبکهٔ خطی دیگر، که فعلاً مشخص نشده است، خاتمه می‌یابند. با استفاده از معادلات (۴-۶۵ب)، (۴-۶۹) و (۴-۷۰) داریم:

$$v^{\rightarrow}(x,t) = v_p \int_{\cdot}^{\infty} dk\, \frac{v_{\cdot}^{\rightarrow}(k)}{۲\pi} e^{iv_p|k|(t-x/v_p)} + \text{c.c.}, \qquad (۴\text{-}۸۳\text{آ})$$

$$v^{\leftarrow}(x,t) = v_p \int_{-\infty}^{\cdot} dk\, \frac{v_{\cdot}^{\leftarrow}(k)}{۲\pi} e^{iv_p|k|(t+x/v_p)} + \text{c.c.}, \qquad (۴\text{-}۸۳\text{ب})$$

که در آن دامنه‌های $v_{\cdot}^{\rightarrow}(k)$ و $v_{\cdot}^{\leftarrow}(k)$ به‌صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$v_{\cdot}^{\rightarrow}(k) = i\sqrt{\frac{\hbar k Z_{\cdot}}{۴\pi}}\, b_k\, ۲\pi, \qquad k > \cdot, \qquad (۴\text{-}۸۴\text{آ})$$

$$v_{\cdot}^{\leftarrow}(k) = i\sqrt{-\frac{\hbar k Z_{\cdot}}{۴\pi}}\, b_k\, ۲\pi, \qquad k < \cdot. \qquad (۴\text{-}۸۴\text{ب})$$

وقتی خط انتقال از یک طرف به یک شبکهٔ الکتریکی دیگر، مثلاً یک شبکهٔ خطی که فقط می‌تواند سیگنال ولتاژ ورودی را بازتاب دهد، متصل شود، آنگاه $v^{\rightarrow}(x,t)$ به $v^{\leftarrow}(x,t)$ در مکانی x که بازتاب در آن رخ می‌دهد، مربوط می‌شود؛ تمرین ۴-۱-۵ را ببینید.

تمرین ۴.۴.۲: رزوناتور خط انتقال $\lambda/۲$

یک خط انتقال متناهی با طول d، یعنی $x \in [\cdot, d]$، را با شرط‌های مرزی مدار باز در نظر بگیرید:

$$i(\cdot,t) = i(d,t) = \cdot.$$

ابتدا مسئله را کاملاً کلاسیکی بررسی می‌کنیم.

۱. معادلهٔ موج (۴-۶۰) را برای $\Phi(x,t)$ در نظر بگیرید و به‌دنبال جواب‌هایی از فرم

$$\Phi(x,t) = \xi(t) f(x)$$

باشید. نشان دهید که شرط‌های مرزی، محدودیت‌هایی را بر فرم تابع‌های $f(x)$ اعمال می‌کنند و می‌توان جواب‌هایی از فرم قبلی، یعنی

$$\Phi_n(x,t) = \xi_n(t) f_n(x),$$

یافت که با یک عدد صحیح $n = ۰, ۱, ۲, \ldots$ پارامتری می‌شوند و فرکانس‌های آن‌ها برابر است با:

$$\omega(k_n) = \omega_n = v_p k_n = \frac{v_p \pi n}{d}, \qquad (۸۵\text{-}۴)$$

که بزرگ‌ترین طول موج پشتیبانی‌شده $\lambda = ۲d$ را نتیجه می‌دهد.

۲. به‌دلیل خطی بودن، می‌توان یک جواب کلی را به‌صورت زیر نوشت:

$$\Phi(x,t) = \sum_{n=۰}^{+\infty} \xi_n(t) f_n(x). \qquad (۸۶\text{-}۴)$$

این بسط را در معادله (۴-۵۵) جایگذاری کنید و روی x انتگرال بگیرید تا لاگرانژی برحسب متغیرهای دینامیکی تعمیم‌یافته ξ_n و $\dot{\xi}_n$ به‌دست آید. سپس هامیلتونی را برحسب ξ_n و تکانه‌های کانونی متناظر q_n به‌دست آورید.

راهنمایی: به یاد داشته باشید که برای n, m صحیح داریم

$$\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi} dx\ \cos(nx)\cos(mx) = \frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi} dx\ \sin(mx)\sin(mx) = \delta_{nm}. \qquad (۸۷\text{-}۴)$$

۳. نظریه را کوانتیزه کنید و هامیلتونی را برحسب عملگرهای نابودی و آفرینش بوزونی بنویسید. علاوه بر آن، عبارت عملگر ولتاژ $\hat{v}(x)$ را در تصویر شرودینگر برحسب این عملگرها بنویسید.

۴. فرض کنید می‌خواهید یک سیستم، مثلاً یک ترانسمون، را به‌صورت خازنی به رزوناتور کوپل کنید. به‌طور خاص، می‌خواهید این سیستم به‌شدت با مد $n = ۲$ برهم‌کنش داشته باشد. ظرفیت کوپل‌کننده C_c را در چه موقعیتی $x_۰ \in [۰, d]$ قرار می‌دهید؟

پاسخ تمرین ۲.۴.۴

۱. معادلهٔ موج یک‌بعدی را با روش استاندارد حل می‌کنیم. به‌دنبال جواب‌های غیر بدیهی، یعنی غیرصفر، از فرم $\Phi(x,t) = \xi(t) f(x)$ هستیم. با جایگذاری این فرم در معادله (۴-۶۰) و تقسیم بر $\Phi(x,t)$ به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$\frac{۱}{v_p^۲ \xi(t)} \frac{d^۲\xi}{dt^۲} = \frac{۱}{f(x)} \frac{d^۲ f(x)}{dx^۲}. \qquad (۸۸\text{-}۴)$$

دو عبارت داریم که باید با هم برابر باشند، اما تابع متغیرهای متفاوت‌اند. این فقط زمانی ممکن است که هر دو برابر با یک ثابت باشند که آن را $-k^۲$ با k حقیقی می‌نامیم. در نتیجه، دو معادلهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{d^۲\xi}{dt^۲} = -k^۲ v_p^۲ \xi(t), \qquad (۸۹\text{-}۴\text{آ})$$

$$\frac{d^۲ f}{dx^۲} = -k^۲ f(x). \qquad (۸۹\text{-}۴\text{ب})$$

شرط‌های مرزی مدار باز نتیجه می‌دهند که $i(x,t) = i(d,t) = ۰$ برای همهٔ زمان‌ها برقرار است؛ بنابراین:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(۰,t) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(d,t) = ۰, \qquad (۴\text{-}۹۰)$$

که به شرط‌های زیر برای $f'(x)$ تبدیل می‌شود:

$$f'(۰) = f'(d) = ۰. \qquad (۴\text{-}۹۱)$$

جواب کلی معادله (۴-۸۹ب) برابر است با:

$$f(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx), \qquad (۴\text{-}۹۲)$$

که در آن A و B ثابت‌های حقیقی‌اند. شرط $f'(۰) = ۰$ نتیجه می‌دهد که $B = ۰$. در نتیجه، شرط $f'(d) = ۰$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$-Ak\sin(kd) = ۰, \qquad (۴\text{-}۹۳)$$

که فقط زمانی جواب‌های غیر بدیهی می‌دهد که:

$$k = k_n = \frac{\pi n}{d}, \qquad n = \{۰, ۱, ۲, \ldots\}. \qquad (۴\text{-}۹۴)$$

این نتیجه به معادله (۴-۸۵) منجر می‌شود. توجه کنید که می‌توان n را فقط مثبت در نظر گرفت، زیرا جواب‌های منفی همان جواب‌های مثبت‌اند؛ چون کسینوس تابعی زوج است. بنابراین، خانواده‌ای از جواب‌ها را به‌دست آورده‌ایم که با یک عدد صحیح پارامتری می‌شوند:

$$\Phi_n(x,t) = \xi_n(t) f_n(x), \qquad (۴\text{-}۹۵)$$

که در آن

$$f_n(x) = A_n\cos(k_n x). \qquad (۴\text{-}۹۶)$$

انتخاب ثابت‌های A_n اختیاری است. با این حال، می‌توان آن‌ها را طوری انتخاب کرد که نرم $\ell^۲$ تابع $f_n(x)$ برابر با یک باشد. نرم $\ell^۲$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|f_n\| = \left(\frac{۱}{d}\int_۰^d dx\, f_n(x)^۲\right)^{۱/۲}. \qquad (۴\text{-}۹۷)$$

از آنجا که برای $n \geq ۱$ داریم:

$$\frac{۱}{d}\int_۰^d dx\, \cos^۲\left(\frac{\pi n}{d}x\right) = \frac{۱}{۲}, \qquad (۴\text{-}۹۸)$$

می‌گیریم:

$$A_n = \sqrt{۲}, \qquad \forall n \geq ۱,$$

در حالی که برای $n = ۰$ به‌سادگی $A_۰ = ۱$ را انتخاب می‌کنیم. به‌صورت فشرده:

$$f_۰(x) = ۱, \qquad (۴\text{-}۹۹\text{آ})$$

$$f_n(x) = \sqrt{۲}\cos\left(\frac{\pi n}{d}x\right). \qquad (۴\text{-}۹۹\text{ب})$$

به‌دلیل خطی بودن معادلهٔ موج، ترکیب خطی جواب‌ها نیز دوباره یک جواب است؛ بنابراین می‌توان جواب کلی را به‌صورت زیر نوشت:

$$\Phi(x,t)=\sum_{n=۰}^{+\infty}\xi_n(t)f_n(x). \qquad (۴\text{-}۱۰۰)$$

توجه کنید که $\xi_n(t)$ اکنون رابطهٔ زیر را ارضا می‌کند:

$$\frac{d^۲\xi_n}{dt^۲}=-\omega_n^۲\xi_n(t), \qquad (۴\text{-}۱۰۱)$$

که معادلهٔ حرکت یک نوسانگر هماهنگ با فرکانس مشخصه $\omega_n=v_pk_n=v_p\pi n/d$ است. انتظار داریم وقتی این بسط را در لاگرانژی جایگذاری کنیم، همین نتیجه بازتولید شود.

۲. پیش از جایگذاری بسط معادله (۴-۱۰۰) در لاگرانژی، به دو خاصیت تابع‌های $f_n(x)$ توجه می‌کنیم:

$$\frac{۱}{d}\int_۰^d dx\, f_n(x)f_m(x)=\delta_{nm}, \qquad (۴\text{-}۱۰۲\text{آ})$$

$$\frac{۱}{d}\int_۰^d dx\,\frac{df_n}{dx}\frac{df_m}{dx}=k_n^۲\delta_{nm}. \qquad (۴\text{-}۱۰۲\text{ب})$$

این روابط زمانی مفید هستند که بسط معادله (۴-۱۰۰) را در لاگرانژی معادله (۴-۵۵) جایگذاری کنیم:

$$\mathcal{L}=\int_۰^d dx\left\{\frac{c}{۲}\left(\sum_{n=۰}^{+\infty}\dot{\xi}_n(t)f_n(x)\right)^۲-\frac{۱}{۲\ell}\left(\sum_{n=۱}^{+\infty}\xi_n(t)\frac{df_n}{dx}\right)^۲\right\}. \qquad (۴\text{-}۱۰۳)$$

با استفاده از معادلات (؟؟)، به‌دست می‌آوریم:

$$\mathcal{L}=\frac{۱}{۲}dc\sum_{n=۱}^{+\infty}\left(\dot{\xi}_n^۲-\omega_n^۲\xi_n^۲\right)+\frac{۱}{۲}dc\dot{\xi}_۰^۲. \qquad (۴\text{-}۱۰۴)$$

توجه کنید که مد صفر یک ذرهٔ آزاد است که متناظر با یک ولتاژ یا بار ثابت است و در نتیجه شار آن به‌صورت خطی با زمان افزایش می‌یابد؛ زیرا $\omega_n=۰$ نتیجه می‌دهد که جواب معادله (۴-۱۰۱) به‌صورت

$$x_۰(t)=C_۱+C_۲t$$

است. از این به بعد این مد را نادیده می‌گیریم؛ یعنی فرض می‌کنیم شار میانگین ما در $\Phi(x,t)$ همیشه صفر است و شار خطیِ افزایشی ندارد. در هر صورت، در بیشتر حالت‌ها این ولتاژ DC واقعاً صفر است.

با نادیده گرفتن مد ذرهٔ آزاد، متغیرهای مزدوج را به‌دست می‌آوریم:

$$q_n=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\xi}_n}=dc\,\dot{\xi}_n, \qquad (۴\text{-}۱۰۵)$$

و هامیلتونی برابر است با:

$$\mathcal{H}=\sum_{n=۱}^{+\infty}\frac{q_n^۲}{۲dc}+\frac{dc}{۲}\omega_n^۲\xi_n^۲. \qquad (۴\text{-}۱۰۶)$$

۳. اکنون نظریه را به‌صورت معمول کوانتیزه می‌کنیم؛ یعنی متغیرها را به عملگرهایی که با کلاه مشخص شده‌اند ارتقا می‌دهیم:

$$H=\sum_{n=۱}^{+\infty}\frac{\hat{q}_n^۲}{۲dc}+\frac{dc}{۲}\omega_n^۲\hat{\xi}_n^۲, \qquad (۱۰۷\text{-}۴)$$

و روابط جابه‌جایی بین متغیرهای مزدوج را اعمال می‌کنیم:

$$[\hat{\xi}_n,\hat{q}_n]=i\hbar\mathbf{۱}. \qquad (۱۰۸\text{-}۴)$$

می‌بینیم که فقط هامیلتونی مجموعه‌ای از نوسانگرهای هماهنگ مستقل را داریم که «جرم» برابر dc دارند، یعنی برابر با ظرفیت کل، و فرکانس‌های آن‌ها ω_n است. سپس عملگرهای نابودی و آفرینش را معرفی می‌کنیم:

$$\hat{\xi}_n=\sqrt{\frac{\hbar}{۲dc\omega_n}}\left(\hat{a}_n+\hat{a}_n^\dagger\right), \qquad (۱۰۹\text{-}۴\text{آ})$$

$$\hat{q}_n=i\sqrt{\frac{\hbar}{۲}dc\omega_n}\left(\hat{a}_n^\dagger-\hat{a}_n\right), \qquad (۱۰۹\text{-}۴\text{ب})$$

که رابطهٔ جابه‌جایی

$$[\hat{a}_n,\hat{a}_m^\dagger]=\delta_{nm}\mathbf{۱}$$

را ارضا می‌کنند. هامیلتونی به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$H=\sum_{n=۱}^{+\infty}\hbar\omega_n\left(\hat{a}_n^\dagger\hat{a}_n+\frac{۱}{۲}\right). \qquad (۱۱۰\text{-}۴)$$

در تصویر هایزنبرگ داریم:

$$\hat{\Phi}(x,t)=\sum_{n=۱}^{+\infty}\sqrt{\frac{\hbar}{dc\omega_n}}\cos(k_nx)\left(\hat{a}_ne^{-i\omega_nt}+\hat{a}_n^\dagger e^{i\omega_nt}\right), \qquad (۱۱۱\text{-}۴)$$

که از آن می‌توان عبارت عملگر ولتاژ را در تصویر هایزنبرگ نتیجه گرفت:

$$\hat{v}(x,t)=\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial t}=\sum_{n=۱}^{+\infty}i\sqrt{\frac{\hbar\omega_n}{dc}}\cos(k_nx)\left(\hat{a}_n^\dagger e^{i\omega_nt}-\hat{a}_ne^{-i\omega_nt}\right), \qquad (۱۱۲\text{-}۴)$$

که در تصویر شرودینگر برابر است با:

$$\hat{v}(x)=\sum_{n=۱}^{+\infty}i\sqrt{\frac{\hbar\omega_n}{dc}}\cos(k_nx)\left(\hat{a}_n^\dagger-\hat{a}_n\right). \qquad (۱۱۳\text{-}۴)$$

۴. اگر سیستم را به‌صورت خازنی کوپل کنیم، در واقع به میدان ولتاژ $\hat{v}(x)$ در یک موقعیت مشخص $x_۰$ کوپل شده‌ایم. اگر بخواهیم به‌شدت به مد $n=۲$ کوپل شویم، باید در موقعیتی کوپل کنیم که مقدار

$$f_۲(x)=\sqrt{۲}\cos\left(\frac{۲\pi x}{d}\right)$$

از نظر قدرمطلق بیشینه شود. این اتفاق برای

$$x_۰=\{۰,d/۲,d\}$$

رخ می‌دهد. بنابراین، هوشمندانه‌ترین انتخاب این است که ظرفیت کوپل‌کننده را یا در انتهای خط، یا در وسط رزوناتور خط انتقال قرار دهیم.

۴-۵ فرمالیسم ورودی-خروجی: معادلات هایزنبرگ-لانژون

اگر یک کیوبیت ترانسمون، یک رزوناتور، یا هر سیستم دیگری از مدها داشته باشیم که متناظر با مدهای یک مدار الکتریکی باشد، می‌توانیم یک خط انتقال را، برای مثال از طریق کوپلینگ خازنی، به آن متصل کنیم. خط انتقال برای فرستادن پالس‌های الکترومغناطیسی به سیستم استفاده می‌شود؛ پالس‌هایی که یا برای کنترل سیستم به‌کار می‌روند، یا برای به‌دست آوردن اطلاعات دربارهٔ آن از طریق اندازه‌گیری روی سیگنال بازتاب‌شده و/یا عبوری استفاده می‌شوند.

می‌توان معادلات حرکت هایزنبرگ را برای مدهای سیستم نوشت، به‌گونه‌ای که اثر چنین میدان‌های ورودی یا خروجی روی یک خط انتقال نیز در آن‌ها گنجانده شود. در این توصیف، طبق تعریف، میدان ورودی نشان‌دهندهٔ سیگنال ورودی است که در یک زمان اولیهٔ $t_۰$ به سیستم فرستاده شده، و میدان خروجی نشان‌دهندهٔ سیگنال خروجی در یک زمان دیرتر $t_۱ > t_۰$ است. این معادلات هایزنبرگ-لانژون Heisenberg–Langevin equations برای مدل‌سازی اندازه‌گیری کوانتومی یک کیوبیت و همچنین برای مدل‌سازی تقویت‌کننده‌هایی که میدان ورودی را به یک میدان خروجی تقویت‌شده تبدیل می‌کنند، مفید هستند؛ برای نمونه به تمرین‌های ۸-۱ و ۸-۱ در فصل ؟؟ مراجعه کنید. این فرمالیسم، که بر میدان‌های ورودی و خروجی تمرکز دارد، در اصل برای توصیف دینامیک ورودی–خروجی کاواک‌های اپتیکی کوانتومیِ میرا توسعه داده شده است [۷۶].

در اندازه‌گیری یک کیوبیت ترانسمون، کیوبیت به‌صورت پاشنده dispersively به یک رزوناتور کوپل می‌شود؛ به‌طوری که فرکانس تشدید کاواک بسته به حالت کیوبیت جابه‌جا می‌شود. سپس کاواک توسط میدان ورودی پروب می‌شود و میدان خروجی، بسته به حالت کیوبیت، دچار جابه‌جایی فاز می‌شود. برای مدل‌سازی دقیق‌تر اندازه‌گیری کیوبیت ترانسمون، به [۷۷] مراجعه کنید. در تمرین ۴-۷، یک مدل سادهٔ کیوبیتی را بررسی می‌کنیم تا برخی ویژگی‌های این اندازه‌گیری پاشنده را، بدون در نظر گرفتن تقویت، مطالعه کنیم.

در این بخش، معادلات هایزنبرگ–لانژون را استخراج می‌کنیم؛ همچنین نگاه کنید به [۷۸]. یک خط انتقال نیمه‌بی‌نهایت را در نظر می‌گیریم که به‌صورت خازنی به یک رزوناتور با عملگر نابودی $\hat{a}$ کوپل شده است. خود رزوناتور نیز می‌تواند بخشی از یک مدار الکتریکی بزرگ‌تر باشد که با هامیلتونی سیستمی $H_{\rm sys}$ توصیف می‌شود. همان‌طور که در بخش ؟؟ بحث شد، برای خط انتقال نیمه‌بی‌نهایت، در هر فرکانس ω فقط یک مد روی خط انتقال وجود دارد؛ بنابراین از عملگرهای $\hat{b}_\omega$ استفاده می‌کنیم که به‌جای عدد موج k، با فرکانس ω برچسب‌گذاری شده‌اند. از هامیلتونی

$$H = H_{\rm sys} + H_{\rm TL} + H_{\rm coupl}$$

شروع می‌کنیم، که در آن:

$$H_{\rm TL} = \int_۰^\infty d\omega\, \hbar\omega\, \hat{b}_\omega^\dagger \hat{b}_\omega, \qquad H_{\rm coupl} = i\hbar\sqrt{\frac{۱}{۲\pi}}\int_۰^\infty d\omega\, \sqrt{\kappa(\omega)}\left(\hat{a}\hat{b}_\omega^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{b}_\omega\right). \qquad (۴\text{-}۱۱۴)$$

در اینجا نرخ واپاشی $\kappa(\omega)$ به‌طور مؤثر کوپلینگ خازنی خط انتقال از طریق رزوناتور را مدل می‌کند. اگر $\kappa(\omega)$ را مستقل از فرکانس در نظر بگیریم، یعنی $\kappa = \kappa(\omega)$، یک تقریب مارکوفی ساده به‌دست می‌آید که از این به بعد از آن استفاده می‌کنیم. معادلهٔ هایزنبرگ برای $\hat{b}_\omega(t)$ به‌صورت زیر است:

$$\frac{d\hat{b}_\omega}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, \hat{b}_\omega(t)] = -i\omega\hat{b}_\omega(t) + \sqrt{\frac{\kappa}{۲\pi}}\,\hat{a}(t), \qquad (۴\text{-}۱۱۵)$$

که می‌توان آن را به‌صورت صوری، هم رو به عقب و هم رو به جلو در زمان، حل کرد. یعنی برای $t > t_۰$ و $t < t_۱$ داریم:

$$\hat{b}_\omega(t) = e^{-i\omega(t-t_۰)}\hat{b}_\omega(t_۰) + \sqrt{\frac{\kappa}{۲\pi}}\int_{t_۰}^t d\tau\, e^{-i\omega(t-\tau)}\hat{a}(\tau), \qquad (۴\text{-}۱۱۶)$$

و

$$\hat{b}_\omega(t) = e^{-i\omega(t-t_۱)}\hat{b}_\omega(t_۱) - \sqrt{\frac{\kappa}{۲\pi}}\int_t^{t_۱} d\tau\, e^{-i\omega(t-\tau)}\hat{a}(\tau). \qquad (۴\text{-}۱۱۷)$$

اکنون میدان ورودی $\hat{b}_{\rm in}(t)$ و میدان خروجی $\hat{b}_{\rm out}(t)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

(۴-۱۱۸)

$$\hat{b}_{\rm in}(t) = -\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_0^\infty d\omega\, e^{-i\omega(t-t_0)}\hat{b}_\omega(t_0), \qquad \hat{b}_{\rm out}(t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_0^\infty d\omega\, e^{-i\omega(t-t_1)}\hat{b}_\omega(t_1).$$

دلیل تغییر علامت در این تعریف‌ها این است که در نبود هرگونه رزوناتور، موج ورودی به‌سادگی از انتهای خط انتقال بازتاب می‌شود و علامت دامنهٔ آن تغییر می‌کند.[۴]

اکنون می‌توانیم معادلهٔ هایزنبرگ برای $\hat{a}(t)$ را در نظر بگیریم:

$$\frac{d\hat{a}(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H_{\rm sys}, \hat{a}(t)] - \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}}\int_0^\infty d\omega\, \hat{b}_\omega(t). \qquad (۴\text{-}۱۱۹)$$

با استفاده از معادلات (۴-۱۱۶) و (۴-۱۱۷)، تعریف‌های $\hat{b}_{\rm in}(t)$ و $\hat{b}_{\rm out}(t)$، و رابطهٔ

$$\int_{t_0}^t d\tau\, \delta(t-\tau)\hat{a}(\tau) = \frac{1}{2}\hat{a}(t),$$

به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{d\hat{a}(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H_{\rm sys}, \hat{a}(t)] - \frac{\kappa}{2}\hat{a}(t) + \sqrt{\kappa}\,\hat{b}_{\rm in}(t), \qquad (۴\text{-}۱۲۰)$$

و

$$\frac{d\hat{a}(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H_{\rm sys}, \hat{a}(t)] + \frac{\kappa}{2}\hat{a}(t) - \sqrt{\kappa}\,\hat{b}_{\rm out}(t). \qquad (۴\text{-}۱۲۱)$$

این دو رابطه با هم نتیجه می‌دهند:

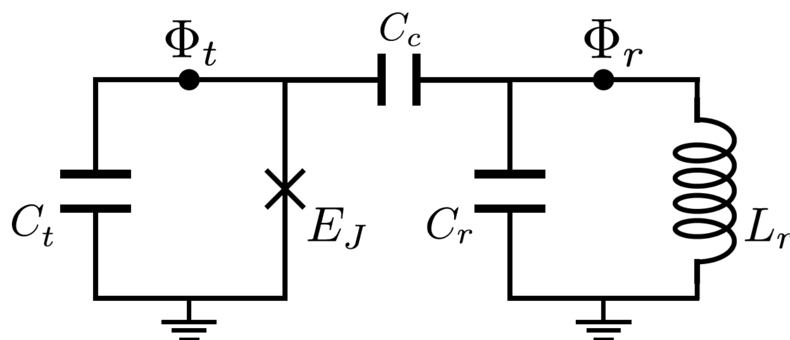
$$\hat{b}_{\rm in}(t) + \hat{b}_{\rm out}(t) = \sqrt{\kappa}\,\hat{a}(t). \qquad (۴\text{-}۱۲۲)$$

اکنون اگر $\langle\hat{b}_{\rm in}(t)\rangle$ را بدانیم، معادله (۴-۱۲۰) و معادله (۴-۱۲۲) به ما اجازه می‌دهند دینامیک مد رزوناتور را با استفاده از $H_{\rm sys}$ حل کنیم و میدان خروجی $\langle\hat{b}_{\rm out}(t)\rangle$ را به‌دست آوریم. برای یک رزوناتور سادهٔ بدون رانش، یعنی $\langle\hat{b}_{\rm in}(t)\rangle = 0$، معادله (۴-۱۲۰)، با قرار دادن رزوناتور در یک حالت همدوس $|\alpha\rangle$ که در معادله (۴-۴۳) تعریف شد، واپاشی دامنهٔ همدوس

$$\alpha(t) = \langle\alpha|\hat{a}(t)|\alpha\rangle$$

را با نرخ κ بیان می‌کند.

۴-۶ کوپل خازنی یک ترنسمون به یک رزوناتور



شکل ۴-۱۰: یک ترانسمون که به‌صورت خازنی به یک رزوناتور کوپل شده است

[۴] این تغییر علامت همان تغییر فاز π در بازتاب از انتهای مناسب خط انتقال است.

در مدارهای ابررسانا برای پردازش اطلاعات کوانتومی، ترانسمون‌ها به‌طور معمول به‌صورت خازنی به رزوناتورهای مایکروویوی یا به ترانسمون‌های دیگر کوپل می‌شوند. علاوه بر کوپلینگ خازنی، در برخی چیدمان‌ها، به‌ویژه برای کیوبیت‌های شار، کوپلینگ گالوانیکی galvanic coupling و کوپلینگ القایی inductive coupling نیز رخ می‌دهد. منظور از کوپلینگ گالوانیکی این است که کیوبیت و سیستمِ کوپل‌شده به آن، که می‌تواند یک رزوناتور یا چیزی باشد که به‌صورت یک کیوبیت دیگر مدل می‌شود، بخش‌های متصل از مادۀ ابررسانا را تشکیل می‌دهند؛ برخلاف کوپلینگ خازنی یا کوپلینگ القایی متقابل.

کوپلینگ‌های خازنی بین ترانسمون‌ها و رزوناتورها در سه حالت اصلی رخ می‌دهند:

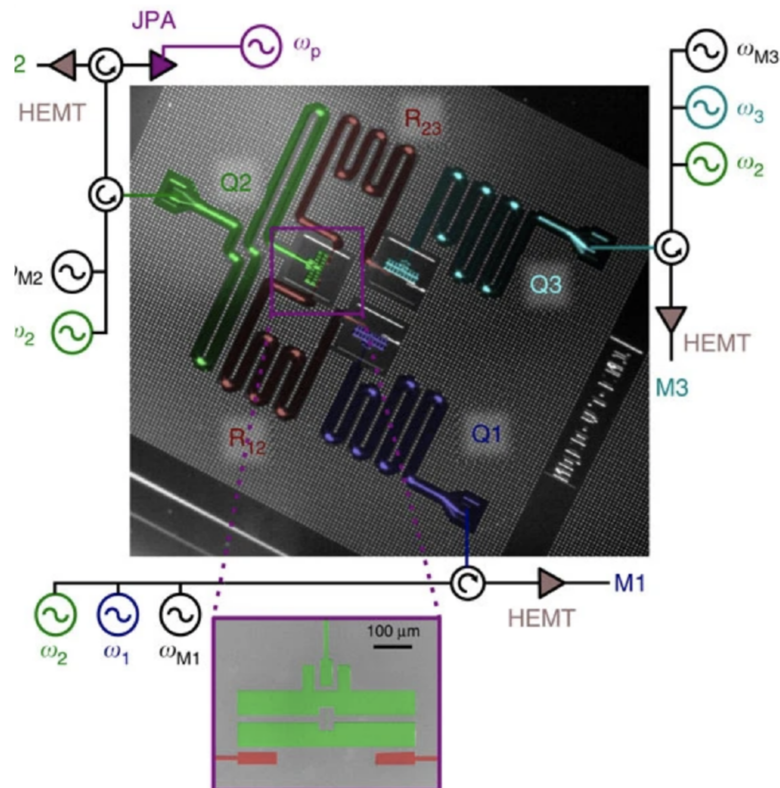
۱. رزوناتور برای انجام اندازه‌گیری حالت کیوبیت از طریق روش موسوم به بازخوانی پاشنده dispersive readout استفاده می‌شود [۷۷، ۷۹، ۸۰]. در این حالت، معمولاً از آن با عنوان رزوناتور بازخوانی readout resonator یاد می‌شود.

۲. دو یا چند ترانسمون به یک رزوناتور کوپل می‌شوند و آن رزوناتور برهم‌کنش بین آن‌ها را واسطه‌گری می‌کند؛ برای نمونه، به چیدمان ارائه‌شده در Ref. [88] و شکل ۴-۸ مراجعه کنید. در این حالت، رزوناتور، رزوناتور گذرگاه bus resonator نامیده می‌شود. دو ترانسمون همچنین می‌توانند به‌صورت خازنی از طریق یک ترانسمون میانیِ قابل‌تنظیم با شار flux-tunable intermediate transmon به هم کوپل شوند؛ به‌گونه‌ای که فرکانس تشدید ترانسمون میانی بتواند اثر چنین کوپلری را افزایش یا کاهش دهد [۸۱، ۸۲].

۳. ترانسمون برای هدایت حالت رزوناتور استفاده می‌شود؛ رزوناتوری که اطلاعات کوانتومی در آن کدگذاری شده است. یا یک ترانسمون برای کوپل کردن دو رزوناتور به‌کار می‌رود؛ رزوناتورهایی که اطلاعات کوانتومی را ذخیره می‌کنند. در این نوع چیدمان، حالت‌های حامل اطلاعات در رزوناتورها را می‌توان به‌گونه‌ای مناسب انتخاب کرد که با استفاده از چارچوب کلی تصحیح خطای کوانتومی بوزونی bosonic quantum error correction، خطاها سرکوب و اصلاح شوند؛ برای مرور، برای نمونه به مراجع [۸۳، ۸۴] مراجعه کنید.

در اینجا مدار بنیادیِ پشت این کاربردهای متفاوت را بررسی می‌کنیم. این مدار در شکل ۴-۱۰ نشان داده شده است؛ جایی که یک ترانسمون به‌صورت خازنی به یک نوسانگر LC متمرکز lumped LC oscillator کوپل شده است. اگرچه این مدار همۀ فیزیک مورد نیاز ما را در بر دارد، در کاربردهای واقعی، رزوناتور معمولاً به‌صورت فیزیکی به شکل یک مدار متمرکز پیاده‌سازی نمی‌شود. در عوض، مد رزوناتور معمولاً به‌عنوان یکی از مدهای یک خط انتقال متناهی دوبعدی یا یک کاواک مایکروویوی سه‌بعدی انتخاب می‌شود.

منظور از انتخاب کردن این است که مد مربوطه، در مقایسه با همۀ مدهای دیگر، از نظر فرکانسی به فرکانس مشخصۀ ترانسمون نزدیک‌تر است و علاوه بر آن، کوپلینگ بزرگی با ترانسمون دارد. این موضوع به ما اجازه می‌دهد سایر مدهای حاضر در رزوناتور را نادیده بگیریم و سیستم را به‌طور مؤثر به چیزی که در شکل ۴-۱۰ نشان داده شده است نگاشت کنیم؛ با یک ظرفیت و اندوکتانس مؤثر که مد انتخاب‌شده را مشخص می‌کنند. برای چند نمونه که از این مدل ساده فراتر می‌روند و ماهیت چندمدی رزوناتورها را نیز در نظر می‌گیرند، به مراجع [۸۵–۸۷] مراجعه کنید.



شکل ۴-۱۱: ریزنگارهٔ نوری با رنگ کاذب از [۸۸]، شامل سه کیوبیت ترانسمون $(Q_۱, Q_۲, Q_۳)$ که به‌صورت کادر نشان داده شده‌اند. هر کیوبیت رزوناتور بازخوانی مخصوص به خود را دارد که به‌ترتیب با رنگ‌های بنفش، سبز و فیروزه‌ای مشخص شده‌اند. کیوبیت $Q_۲$ از طریق رزوناتور گذرگاه قرمز به کیوبیت‌های $Q_۱$ و $Q_۳$ کوپل شده است. بخش بزرگ‌نمایی‌شده مربوط به ترانسمون سبز است که شامل دو جزیرهٔ خازنی است؛ این دو جزیره از طریق یک اتصال جوزفسون به هم متصل شده‌اند که در تصویر قابل مشاهده نیست. همچنین کوپلینگ خازنی این ترانسمون به رزوناتور بازخوانی سبز و رزوناتور گذرگاه قرمز نشان داده شده است.

برای به‌دست آوردن لاگرانژی مدار شکل ۴-۱۰، از دستورالعمل کلیِ استخراج لاگرانژی مدارهای الکتریکی که در بخش ۲-۱ توسعه داده شد پیروی می‌کنیم. لاگرانژی این مدار به‌صورت زیر است:

$$\mathcal{L} = \frac{C_t}{۲}\dot{\Phi}_t^۲ + \frac{C_r}{۲}\dot{\Phi}_r^۲ + \frac{C_c}{۲}\left(\dot{\Phi}_t - \dot{\Phi}_r\right)^۲ + E_J \cos\left(\frac{۲\pi}{\Phi_۰}\Phi_t\right) - \frac{\Phi_r^۲}{۲L_r}. \tag{۴-۱۲۳}$$

با توجه به انتخاب متغیرهای مستقل، ماتریس ظرفیت مدار برابر است با:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_t + C_c & -C_c \\ -C_c & C_r + C_c \end{pmatrix}, \tag{۴-۱۲۴}$$

که تعریف متغیرهای مزدوج را به‌صورت زیر به‌دست می‌دهد:

$$\begin{pmatrix} Q_t \\ Q_r \end{pmatrix} = \mathbf{C}\begin{pmatrix} \dot{\Phi}_t \\ \dot{\Phi}_r \end{pmatrix}. \tag{۴-۱۲۵}$$

هامیلتونی یک ترانسمون، یا به‌طور کلی‌تر یک CPB، که به‌صورت خازنی به یک رزوناتور کوپل شده است، در فرم کوانتیزه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$H = \frac{\hat{Q}_t^۲}{۲\tilde{C}_t} + \frac{\hat{Q}_r^۲}{۲\tilde{C}_r} + \frac{\hat{Q}_r\hat{Q}_t}{\tilde{C}_c} - E_J \cos\left(\frac{۲\pi}{\Phi_۰}\hat{\Phi}_t\right) + \frac{\hat{\Phi}_r^۲}{۲L_r}. \tag{۴-۱۲۶}$$

در اینجا ظرفیت‌های «معادل» را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{C}_t = \frac{\det(\mathbf{C})}{C_r + C_c}, \qquad (۴-۱۲۷آ)$$

$$\tilde{C}_r = \frac{\det(\mathbf{C})}{C_t + C_c}, \qquad (۴-۱۲۷ب)$$

$$\tilde{C}_c = \frac{\det(\mathbf{C})}{C_c}, \qquad (۴-۱۲۷ج)$$

که در آن

$$\det(\mathbf{C}) = C_r C_t + C_c C_t + C_c C_r$$

دترمینان ماتریس ظرفیت است. همان‌طور که به‌سادگی می‌توان بررسی کرد، ظرفیت معادل ترانسمون $\tilde{C}_t$ همان ظرفیتی است که اگر اندوکتانس L_r رزوناتور را با یک مدار باز جایگزین کنیم و قوانین سادهٔ ظرفیت‌های سری و موازی را اعمال کنیم، ترانسمون را شنت می‌کند. به‌صورت مشابه، ظرفیت معادل رزوناتور $\tilde{C}_r$ را نیز می‌توان با جایگزین کردن اتصال جوزفسون با یک مدار باز و استفاده از همان روش به‌دست آورد.

می‌توانیم هامیلتونی را برحسب متغیرهای بازمقیاس‌شده به‌صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$H = ۴E_{C_t}\hat{q}_t^{۲} + ۴E_{C_r}\hat{q}_r^{۲} + ۸E_{C_c}\hat{q}_r\hat{q}_t - E_J\cos\hat{\phi}_t + \frac{E_{L_r}}{۲}\hat{\phi}_r^{۲}, \qquad (۴-۱۲۸)$$

که در آن E_{C_t}، E_{C_r} و E_{C_c} انرژی‌های شارژ متناظر با $\tilde{C}_t$، $\tilde{C}_r$ و $\tilde{C}_c$ هستند؛ با معادله (۲-۲۱) مقایسه کنید. همچنین E_{L_r} انرژی القایی رزوناتور است؛ با معادله (۲-۲۲) مقایسه کنید.

اکنون تقریب ترانسمون را، که در بخش ۴-۲ توضیح داده شد، انجام می‌دهیم؛ تقریبی که برای $E_J/E_{C_t} \gg ۱$ معتبر است. توجه کنید که برای ارزیابی اعتبار این تقریب، ظرفیت کل ترانسمون $\tilde{C}_t$ که E_{C_t} را تعیین می‌کند اهمیت دارد، نه فقط ظرفیت شنت «فیزیکی» C_t. با معرفی عملگرهای نابودی و آفرینش برای ترانسمون، $\hat{b}$ و $\hat{b}^\dagger$، همانند بخش ۴-۲، و برای نوسانگر، $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$، همانند بخش ۲-۲-۱، هامیلتونی تقریبی، با صرف‌نظر از جمله‌های ثابت، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$H \approx H_{\text{tr+osc}} = \hbar\Omega_t\hat{b}^\dagger\hat{b} + \frac{\hbar\delta_t}{۲}\hat{b}^\dagger\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{b} + \hbar\omega_r\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hbar g\left(\hat{a}^\dagger - \hat{a}\right)\left(\hat{b}^\dagger - \hat{b}\right), \qquad (۴-۱۲۹)$$

که در آن

$$\hbar\Omega_t = \sqrt{۸E_J E_{C_t}} - E_{C_t}, \qquad \hbar\delta_t = -E_{C_t},$$

و

$$\hbar\omega_r = \sqrt{۸E_{L_r}E_{C_r}} = \frac{\hbar}{\sqrt{\tilde{C}_r L_r}}.$$

همچنین ضریب کوپلینگ g را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\hbar g = \frac{\hbar}{۲\tilde{C}_c\sqrt{Z_r Z_t}} = ۲E_{C_c}\left(\frac{E_J}{۲E_{C_t}}\right)^{۱/۴}\left(\frac{E_{L_r}}{۲E_{C_r}}\right)^{۱/۴}, \qquad (۴-۱۳۰)$$

که در آن

$$Z_{r(t)} = \sqrt{\frac{L_{r(t)}}{\tilde{C}_{r(t)}}}$$

امپدانس مشخصهٔ رزوناتور، به‌ترتیب ترانسمون، است. توجه کنید که وابستگی پارامتری به مقیاس‌های انرژی، همانند حالت ترانسمونِ کوپل‌نشده در معادلات (۴-۴۱) و (۴-۴۲) است؛ با این تفاوت که اکنون از ظرفیت‌های معادل $\tilde{C}_t$،

$\tilde{C}_r$ و $\tilde{C}_c$ استفاده می‌شود. معادله (۴-۱۳۰) نشان می‌دهد که برای یک ظرفیت کوپلینگ معادل مشخص $\tilde{C}_c$، ضریب کوپلینگ g فقط به امپدانس‌های مشخصهٔ رزوناتور و ترانسمون، یا به‌طور معادل به نسبت‌های E_J/E_{C_t} و E_{L_r}/E_{C_r} وابسته است. به‌طور خاص، g با افزایش Z_r و Z_t کاهش می‌یابد.

برای به‌دست آوردن شهود بیشتر، معادله (۴-۱۳۰) را به‌صورت زیر نیز بازنویسی می‌کنیم:

$$\hbar g = \frac{\hbar\sqrt{\tilde{C}_r\tilde{C}_t\omega_r\left(\Omega_t-\delta_t\right)}}{۲\tilde{C}_c}. \qquad (۴\text{-}۱۳۱)$$

این رابطه نشان می‌دهد که برای یک شبکهٔ خازنی ثابت، ضریب کوپلینگ با فرکانس رزوناتور ω_r افزایش می‌یابد. با این حال، اگر فرکانس ترانسمون را ثابت نگه داریم، اثر آن روی مقادیر ویژهٔ مسئله از بین می‌رود؛ زیرا:

$$\lim_{\omega_r\to\infty}\frac{g}{\omega_r-\Omega_t} = ۰.$$

در نهایت، مشابه بخش‌های ۴-۲ و ۴-۳، جمله‌هایی را که تعداد نابرابری از عملگرهای نابودی و آفرینش دارند، که به آن‌ها جمله‌های nonsecular نیز گفته می‌شود، نادیده می‌گیریم و هامیلتونی یک مدل جینز–کامینگز Jaynes–Cummings تعمیم‌یافته را به‌دست می‌آوریم [۶۶، ۸۹]:

$$\frac{H}{\hbar} \overset{\text{RWA}}{\approx} \frac{H_{\text{tr+osc}}}{\hbar} = \Omega_t\hat{b}^\dagger\hat{b} + \frac{\delta_t}{۲}\hat{b}^\dagger\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{b} + \omega_r\hat{a}^\dagger\hat{a} + g\left(\hat{a}^\dagger\hat{b}+\hat{a}\hat{b}^\dagger\right). \qquad (۴\text{-}۱۳۲)$$

اگر مد ناهماهنگ ترانسمون را به فضای هیلبرت یک کیوبیت برش دهیم، مدل معمول جینز–کامینگز JC به‌دست می‌آید:

$$\frac{H_{\text{JC}}}{\hbar} = \frac{\Omega_t}{۲}\sigma_z + \omega_r\hat{a}^\dagger\hat{a} + g\left(\hat{a}^\dagger\sigma^- + \hat{a}\sigma^+\right), \qquad (۴\text{-}۱۳۳)$$

که در آن

$$\sigma^+ = |e\rangle\langle g| = (\sigma^-)^\dagger, \qquad \sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|.$$

توجه کنید که می‌توان با اضافه کردن

$$\frac{\Omega_t}{۲}\mathbb{۱}\otimes\mathbb{۱}$$

به هامیلتونی، طیف را به سمت بالا جابه‌جا کرد تا حالت $|g,۰\rangle$ انرژی صفر داشته باشد. مدلی که در آن فضای ترانسمون را به یک کیوبیت برش می‌دهیم، اما جمله‌های غیرسکولار را همچنان نگه می‌داریم، مدل رابی Rabi model نامیده می‌شود. مدل رابی نسبت به مدل جینز–کامینگز تقارن کمتری دارد، اما همچنان انتگرال‌پذیر است [۹۰] و به‌صورت تجربی با استفاده از یک کیوبیت ترانسمون نیز بررسی شده است [۹۱].

تمرین ۱.۶.۴

۱. به‌صورت صریح نشان دهید که عملگر متناظر با تعداد کل برانگیختگی‌ها،

$$\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{b}^\dagger\hat{b},$$

تحت دینامیکی که توسط هامیلتونی معادله (۴-۱۳۲) تولید می‌شود، ناوردا است.

۲. با استفاده از معادله (۴-۱۰) نشان دهید که:

$$e^{i\theta\hat{a}^\dagger\hat{a}}\hat{a}e^{-i\theta\hat{a}^\dagger\hat{a}} = e^{-i\theta}\hat{a}, \qquad (۴\text{-}۱۳۴)$$

و همین رابطه برای $\hat{b}$ نیز برقرار است. از این نتیجه استفاده کنید و استدلال کنید که طیف هامیلتونی در معادله (۴-۱۳۲) فقط به مقدار مطلق g وابسته است.

۳. فرض کنید با شروع از هامیلتونی معادله (۴-۱۳۲)، می‌خواهید از گذار اول ترانسمون، یعنی گذار بین حالت پایه $|g\rangle$ و حالت نخستِ برانگیخته $|e\rangle$، برای شبیه‌سازی یک سیستم دوترازی کوپل‌شده به یک نوسانگر هماهنگ از طریق هامیلتونی جینز–کامینگز معادله (۴-۱۳۳) استفاده کنید. در این حالت، پارامتر $g_{\rm JC}$ چیست؟ فرکانس رزوناتور را چگونه انتخاب می‌کنید تا این مدل تقریباً محقق شود؟ توضیح دهید چرا. به‌طور خاص، اگر $\omega_r < \Omega_t$ انتخاب شود، چه اتفاقی ممکن است رخ دهد؟

توضیح: توجه کنید که هامیلتونی JC نیز تعداد برانگیختگی‌ها

$$|e\rangle\langle e| + \hat{a}^\dagger \hat{a}$$

را حفظ می‌کند.

۴. طیف هامیلتونی جینز–کامینگز در معادله (۴-۱۳۳) در حالت تشدیدی $\omega_r = \Omega_t$ در بخش تک‌برانگیختگی چیست؟ مشاهدهٔ این دو تراز انرژی، شکافت رابی خلأ vacuum Rabi splitting نامیده می‌شود. این طیف در بخش n-برانگیختگی چیست؟ چگونه می‌توان $|g_{\rm JC}|$ را به‌صورت تجربی تعیین کرد؟

پاسخ تمرین ۱.۶.۴

۱. معادلهٔ حرکت هایزنبرگ برای یک عملگر کلی $\hat{A}$ که تحت هامیلتونی H تکامل می‌یابد، به‌صورت زیر است:

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, \hat{A}(t)]. \tag{۴-۱۳۵}$$

بنابراین، یک عملگر زمانی ناوردای حرکت است که در هر زمان با هامیلتونی جابه‌جا شود. اگر هامیلتونی مستقل از زمان باشد، کافی است این موضوع را در یک زمان مشخص نشان دهیم. در اینجا کافی است نشان دهیم که

$$\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{b}$$

با $H_{\rm tr+osc}$ در معادله (۴-۱۳۲) جابه‌جا می‌شود. بدیهی است که $\hat{n}$ با $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ و $\hat{b}^\dagger \hat{b}$ جابه‌جا می‌شود. پس دو جملهٔ باقی‌مانده را بررسی می‌کنیم. ابتدا داریم:

$$[\hat{n}, \hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{b}] = ۰.$$

اکنون جملهٔ کوپلینگ را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
[\hat{n}, \hat{b}^\dagger \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{b}] &= [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{b}^\dagger \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{b}] + [\hat{b}^\dagger \hat{b}, \hat{b}^\dagger \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{b}] \\
&= [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}^\dagger]\hat{b} + [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}]\hat{b}^\dagger + \hat{a}^\dagger[\hat{b}^\dagger \hat{b}, \hat{b}] + \hat{a}[\hat{b}^\dagger \hat{b}, \hat{b}^\dagger] \\
&= \hat{a}^\dagger \hat{b} - \hat{a}\hat{b}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{a}\hat{b}^\dagger = ۰.
\end{aligned} \tag{۴-۱۳۶}$$

این نشان می‌دهد که

$$[\hat{n}, H_{\rm tr+osc}] = ۰.$$

این نتیجه یعنی می‌توان $\hat{n}$ و $H_{\rm tr+osc}$ را به‌طور همزمان قطری کرد؛ یا به‌طور معادل، می‌توان $H_{\rm tr+osc}$ را در زیرفضاهایی با مقدار ویژهٔ ثابت $\hat{n}$ به‌صورت بلوکی قطری کرد.

۲. توجه کنید که:

$$[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}] = -\hat{a}. \tag{۴-۱۳۷}$$

پس:

$$C_n = [i\theta \hat{a}^\dagger \hat{a}, C_{n-۱}] = (i\theta)^n (-۱)^n \hat{a}, \tag{۱۳۸-۴}$$

با $C_۰ = \hat{a}$. بنابراین:

$$e^{i\theta \hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{a} e^{-i\theta \hat{a}^\dagger \hat{a}} = \hat{a} \sum_{n=۰}^{+\infty} \frac{(-i\theta)^n}{n!} = e^{-i\theta} \hat{a}. \tag{۱۳۹-۴}$$

این نشان می‌دهد که با اعمال تبدیل یکانی $e^{i\pi \hat{a}^\dagger \hat{a}}$ به $H_{\text{tr+osc}}$، می‌توان علامت g را تغییر داد. از آنجا که طیف یک هامیلتونی تحت تبدیل‌های یکانی ناوردا است، نتیجه می‌شود که طیف فقط می‌تواند به $|g|$ وابسته باشد.

۳. برای به‌دست آوردن هامیلتونی جینز-کامینگز با استفاده از دو تراز اول، باید تصویرگر

$$\Pi = (|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|) \otimes I$$

را روی $H_{\text{tr+osc}}$ اعمال کنیم. در نتیجه داریم:

$$\frac{\Pi H_{\text{tr+osc}} \Pi}{\hbar} = \frac{\Omega_t}{۲} |e\rangle\langle e| - \frac{\Omega_t}{۲} |g\rangle\langle g| + \omega_r \hat{a}^\dagger \hat{a} + g \left(\hat{a}^\dagger \sigma^- + \hat{a} \sigma^+ \right). \tag{۱۴۰-۴}$$

بنابراین:

$$g = g_{\text{JC}}.$$

برای معتبر بودن تقریب قبلی، باید فرض کنیم که حالت‌های ویژهٔ نوسانگر عمدتاً با دو حالت ویژهٔ نخست ترانسمون، $|g\rangle$ و $|e\rangle$، هیبرید می‌شوند. این زمانی رخ می‌دهد که ω_r را نسبتاً نزدیک به فرکانس ترانسمون Ω_t انتخاب کنیم. اگر $\omega_r < \Omega_t$ انتخاب شود، این خطر وجود دارد که فرکانس رزوناتور بسیار نزدیک به گذار دوم ترانسمون، یعنی گذار بین حالت نخستِ برانگیخته $|e\rangle$ و حالت دومِ برانگیخته $|f\rangle$، قرار گیرد. در واقع، فرکانس این گذار برابر $\Omega_t + \delta_t < \Omega_t$ است، زیرا ناهماهنگی ترانسمون منفی است. وقتی $\omega_r \approx \Omega_t + \delta_t$ باشد، ترجیحاً یک مدل جینز-کامینگز برحسب ترازهای $|e\rangle$ و $|f\rangle$ به‌دست می‌آید.

۴. از آنجا که هامیلتونی JC تعداد کل برانگیختگی‌ها را حفظ می‌کند، می‌توان آن را در هر زیرفضا با تعداد برانگیختگی ثابت قطری کرد. اگر طیف را به سمت بالا جابه‌جا کنیم تا $|۰, g\rangle$ انرژی صفر داشته باشد، آنگاه در منیفلد تک‌برانگیختگی و در حالت تشدیدی داریم:

$$\frac{H_{\text{JC}}^{(۱)}}{\hbar} = \omega_r |۰, e\rangle\langle ۰, e| + \omega_r |۱, g\rangle\langle ۱, g| + g_{\text{JC}} \left(|۱, g\rangle\langle ۰, e| + \text{h.c.} \right). \tag{۱۴۱-۴}$$

به‌صورت صریح، در پایهٔ $|۰, e\rangle, |۱, g\rangle$ داریم:

$$\frac{H_{\text{JC}}^{(۱)}}{\hbar} = \omega_r \mathbb{1} + g_{\text{JC}} \sigma_x, \tag{۱۴۲-۴}$$

که در آن $\mathbb{1}$ ماتریس همانی ۲×۲ و σ_x ماتریس پائولی است. قطری‌سازی سادهٔ این ماتریس، مقادیر ویژهٔ زیر را می‌دهد:

$$E_\pm = \hbar \left(\omega_r \pm g_{\text{JC}} \right),$$

که اختلاف آن‌ها برابر با

$$۲\hbar g_{\text{JC}}$$

است. بنابراین می‌توان $g_{\rm JC}$ را با اندازه‌گیری اختلاف انرژی بین این دو تراز در منیفلد تک‌برانگیختگی به‌دست آورد؛ برای مثال با استفاده از طیف‌سنجی، یعنی رانش دادن سیستم ترانسمون–رزوناتور و مشاهدهٔ جذب یا عبور تقویت‌شده در آن فرکانس‌ها، بسته به چیدمان آزمایش.

در منیفلد n-برانگیختگی، در حالت تشدیدی داریم:

$$\frac{H^{(n)}_{\rm JC}}{\hbar} = n\omega_r|n-۱,e\rangle\langle n-۱,e| + n\omega_r|n,g\rangle\langle n,g| + \sqrt{n}\,g_{\rm JC}\left(|n,g\rangle\langle n-۱,e| + {\rm h.c.}\right).$$

مقادیر ویژه برابرند با:

$$E_\pm = \hbar\left(n\omega_r \pm \sqrt{n}\,g_{\rm JC}\right),$$

و بنابراین شکافت تراز انرژی برابر است با:

$$۲\hbar\sqrt{n}\,g_{\rm JC}.$$

۴-۷ ابزارهای تحلیل اختلالی

در الکترودینامیک کوانتومی مداری circuit QED، اغلب مفید است که هامیلتونی‌های مؤثری استخراج کنیم که دینامیک کم‌انرژی را در حضور اختلال‌ها توصیف می‌کنند. یکی از ابزارهای این کار، تقریب بورن–اوپنهایمر Born-Oppenheimer است که در پیوست ؟؟ بحث شده است. ابزار دیگر، نظریهٔ اختلال شریفر–ولف Schrieffer–Wolff یا SW است که معمولاً برای تحلیل گیت‌های دوکیوبیتی و کوپلرها استفاده می‌شود. در اینجا برخی ویژگی‌های پایه‌ای آن را مرور می‌کنیم؛ برای تحلیل ریاضی کلی‌تر و برخی کاربردها به مراجع [۹۲–۹۴] مراجعه کنید.

فرض کنید هامیلتونی به‌صورت

$$H = H_۰ + \epsilon V$$

داده شده باشد، که در آن $H_۰$ را می‌توان به‌سادگی در تعدادی بلوک، مثلاً m بلوک، قطری یا بلوکی-قطری کرد. معمولاً $H_۰$ هامیلتونی تعدادی کیوبیت و نوسانگرِ کوپل‌نشده است و یکی از بلوک‌ها متناظر با حالت‌های کوپل‌نشدهٔ کم‌انرژی است. بگذارید Δ کمترین شکاف بین طیف‌ها در بلوک‌های مختلف $H_۰$ باشد. اختلال V می‌تواند مجموع یک اختلال خارج‌ازبلوک $V_{\rm OD}$ و یک اختلال درون‌بلوک $V_{\rm D}$ باشد. در اصل، برای معتبر بودن نظریهٔ اختلال فرض می‌شود که

$$\epsilon\|V\| < \Delta/۲.$$

اما برای بسیاری از سیستم‌های چندجسمی که در آن‌ها $\|V\|$ با اندازهٔ سیستم رشد می‌کند، در حالی که Δ ثابت می‌ماند، باید با شرط‌های ملایم‌تری کار کرد [۹۲].

به‌صورت تصویری، مثلاً برای دو بلوک داریم:

$$H_۰ = \begin{pmatrix} \blacksquare & ۰ \\ ۰ & \blacksquare \end{pmatrix}, \qquad V_{\rm OD} = \begin{pmatrix} ۰ & \blacksquare \\ \blacksquare & ۰ \end{pmatrix}, \qquad V_{\rm D} = \begin{pmatrix} \blacksquare & ۰ \\ ۰ & \blacksquare \end{pmatrix},$$

که در آن مربع‌های سیاه فقط شامل درایه‌های ماتریسی غیرصفر هستند. هدف این است که اثر اختلال V را با انجام یک چرخش یکانی

$$U = \exp(S)$$

روی H جذب کنیم، به‌طوری که:

$$H_{\rm eff} = UHU^\dagger, \qquad (۴\text{-}۱۴۳)$$

دوباره مانند $H_۰$ بلوکی-قطری باشد. علاوه بر این، خود S خارج‌ازبلوک و پادهرمیتی است، یعنی طبق تعریف

$$S = -S^\dagger.$$

هدف این است که یک H_{eff} با توصیفی نسبتاً ساده به‌دست آوریم؛ توصیفی که به ما اجازه دهد اثر اختلال را به‌صورت تحلیلی بفهمیم. این کار به‌ویژه در سیستم‌های چندجسمی که در برابر بررسی عددی مقاومت می‌کنند، مفید است. تبدیل یکانی U، همان تبدیل شریفر–ولف SW است. این تبدیل، پایهٔ کیوبیتی کوپل‌نشدهٔ تعیین‌شده توسط $H_۰$ را به پایه‌ای موسوم به پایهٔ پوشیده dressed basis نگاشت می‌کند. S را می‌توان به‌صورت اختلالی تعیین کرد؛ یعنی می‌گیریم:

$$S = \sum_{k=۱}^{\infty} \epsilon^k S^{(k)}, \tag{۴-۱۴۴}$$

و شرط می‌کنیم که هر $S^{(k)}$ خارج‌ازبلوک باشد. برای دو بلوک:

$$S^{(k)} = \begin{pmatrix} \cdot & \blacksquare \\ \blacksquare & \cdot \end{pmatrix}.$$

این شرط که H_{eff} در هر مرتبهٔ اختلالی کاملاً بلوکی-قطری باشد، محدودیت‌هایی ایجاد می‌کند و اجازه می‌دهد $S^{(k)}$ را در هر مرتبه از ϵ به‌دست آوریم.

از معادله (۴-۱۴۳) داریم:

$$H_{\text{eff}} = H + [S, H] + \frac{۱}{۲}[S, [S, H]] + \cdots .$$

در این بسط، جمله‌های مرتبهٔ $\epsilon^۰$، مرتبهٔ $\epsilon^۱$، مرتبهٔ $\epsilon^۲$ و غیره را جداگانه بررسی می‌کنیم. در مرتبهٔ صفر داریم:

$$H_{\text{eff}}^{(۰)} = H_۰, \qquad U = I.$$

در مرتبهٔ اول داریم:

$$H_{\text{eff}}^{(۱)} = H_۰ + \epsilon V + \epsilon [S^{(۱)}, H_۰], \tag{۴-۱۴۵}$$

که باید بلوکی-قطری باشد. چون $H_۰$ بلوکی-قطری D و $S^{(۱)}$ خارج‌ازبلوک OD است، کموتاتور $[S^{(۱)}, H_۰]$ خارج‌ازبلوک خواهد بود؛ به‌اختصار:

$$[\text{D}, \text{OD}] = \text{OD}.$$

بنابراین برای حذف هر بخش خارج‌ازبلوک در مرتبهٔ اول باید داشته باشیم:

$$V_{\text{OD}} = [H_۰, S^{(۱)}]. \tag{۴-۱۴۶}$$

این رابطه اجازه می‌دهد $S^{(۱)}$ را تعیین کنیم. برای مثال، با محاسبهٔ این رابطه در پایهٔ ویژهٔ $\{|\psi_k\rangle\}$ مربوط به $H_۰$، داریم:

$$\langle \psi_k | S^{(۱)} | \psi_l \rangle = \frac{\langle \psi_k | V_{\text{OD}} | \psi_l \rangle}{E_k - E_l}.$$

پس در مرتبهٔ اول داریم:

$$H_{\text{eff}}^{(۱)} = H_۰ + \epsilon V_{\text{D}}.$$

در مرتبهٔ دوم داریم:

$$\begin{aligned} e^S (H_۰ + \epsilon V) e^{-S} &= H_{\text{eff}}^{(۱)} + \epsilon^۲ [S^{(۱)}, V_{\text{OD}}] + \epsilon^۲ [S^{(۱)}, V_{\text{D}}] + \frac{\epsilon^۲}{۲} [S^{(۱)}, [S^{(۱)}, H_۰]] + \epsilon^۲ [S^{(۲)}, H_۰] + O(\epsilon^۳) \\ &= H_۰ + \frac{\epsilon^۲}{۲} [S^{(۱)}, V_{\text{OD}}] + \epsilon^۲ [S^{(۱)}, V_{\text{D}}] + \epsilon^۲ [S^{(۲)}, H_۰] + O(\epsilon^۳). \end{aligned} \tag{۴-۱۴۷}$$

دوباره شرط می‌کنیم که $H_{\text{eff}}^{(۲)}$ در مرتبهٔ $\epsilon^۲$ بلوکی-قطری باشد. اکنون می‌توانیم از این واقعیت استفاده کنیم که

$$[\mathrm{D}, \mathrm{OD}] = \mathrm{OD}$$

و فقط برای حالت دو بلوکی داریم:

$$[\mathrm{OD}, \mathrm{OD}] = \mathrm{D}.$$

از آنجا که $S^{(۲)}$ خارج‌ازبلوک است، در حالت دو بلوکی نتیجه می‌شود:

$$H_{\text{eff}}^{(۲)} = H_۰ + \frac{\epsilon^۲}{۲}[S^{(۱)}, V_{\text{OD}}],$$

و:

$$[S^{(۱)}, V_{\text{D}}] + [S^{(۲)}, H_۰] = ۰, \qquad (۱۴۸\text{-}۴)$$

که از آن می‌توان $S^{(۲)}$ را به‌دست آورد. وقتی $V_{\text{D}} = ۰$، داریم $S^{(۲)} = ۰$. اگر بیش از دو بلوک داشته باشیم، می‌توان $[S^{(۱)}, V_{\text{OD}}]$ را به یک بخش بلوکی-قطری، که به $H_{\text{eff}}^{(۲)}$ کمک می‌کند، و یک بخش خارج‌ازبلوک، که به معادله (۴-۱۴۸) اضافه می‌شود، تفکیک کرد. می‌توان این روند را در مرتبهٔ $\epsilon^۳$ و مراتب بالاتر ادامه داد تا بسط اختلالی H_{eff} ساخته شود.

مهم است فراموش نکنیم که هامیلتونی مؤثر، هامیلتونی درجات آزادی در پایهٔ پوشیده dressed basis است. برای مثال، کوپلینگ‌های ضعیف ناخواسته اغلب می‌توانند به هامیلتونی‌های مؤثری منجر شوند که شامل تداخل ZZ بین کیوبیت‌های ترانسمون هستند؛ بنابراین باید آن‌ها را به‌صورت تداخل ZZ بین کیوبیت‌های پوشیده تفسیر کرد. کیوبیت‌های پوشیده همان کیوبیت‌های محاسباتی هستند که منطق محاسبه باید در آن‌ها انجام شود، زیرا کوپلینگ‌های اختلالی را نمی‌توان حذف کرد. وقتی رانش‌های مایکروویوی وابسته به زمان یا پالس‌های جریان یا ولتاژ DC وجود دارند، باید اثر این رانش‌های زمانی را در همین پایهٔ محاسباتی در نظر گرفت.

به‌عنوان یک مثال ساده، می‌توانیم تحلیل SW را روی مدل جینز-کامینگز اعمال کنیم؛ مدلی که در آن دو کیوبیت و یک رزوناتور به‌صورت خارج از تشدید کوپل شده‌اند؛ تمرین ۴-۷ را ببینید. توجه کنید که حالت‌های ویژه و طیف ویژهٔ مدل جینز–کامینگز در اصل به‌سادگی به‌صورت تحلیلی قابل تعیین هستند، زیرا هامیلتونی در زیربخش‌های دوبعدی با تعداد برانگیختگی ثابت بلوکی-قطری است. بنابراین در اصل نیازی به نظریهٔ اختلال نیست. اما شدت جابه‌جایی‌های فرکانسی و کوپلینگ‌هایی که به این روش به‌دست می‌آیند، از تحلیلی کامل‌تر به دست می‌آیند که در آن ترانسمون به یک سیستم دوترازی بریده نمی‌شود، بلکه از معادله (۴-۱۳۲) در تحلیل SW استفاده می‌شود؛ برای نمونه به روابط مراجع [۷۷، ۹۵] مراجعه کنید.

تمرین ۴.۷.۱: تبدیل شریفر-ولف برای دو کیوبیت که به‌صورت خارج از تشدید به یک رزوناتور کوپل شده‌اند

مسئلهٔ دو کیوبیت ترانسمون را در نظر می‌گیریم که به‌صورت خطی به یک رزوناتور کوپل شده‌اند. در این محاسبه مستقیماً از تقریب دوترازی برای کیوبیت ترانسمون استفاده می‌کنیم و فرض می‌کنیم کیوبیت‌ها هامیلتونی زیر را دارند:

$$\frac{H_k}{\hbar} = \frac{\Omega_k}{۲}\sigma_k^z, \qquad k = ۱, ۲, \qquad (۱۴۹\text{-}۴)$$

که در آن Ω_k فرکانس مشخصهٔ کیوبیت k است. در اینجا قرارداد اپتیک کوانتومی را فرض می‌کنیم:

$$\sigma_k^z = |e\rangle\langle e|_k - |g\rangle\langle g|_k, \qquad \sigma_k^+ = |e\rangle\langle g|_k, \qquad \sigma_k^- = |g\rangle\langle e|_k.$$

برهم‌کنش با رزوناتور با جملهٔ دوتایی زیر توصیف می‌شود:

$$\frac{V_k}{\hbar} = g_k\left(\hat{a}^\dagger\sigma_k^- + \hat{a}\sigma_k^+\right). \qquad (۱۵۰\text{-}۴)$$

بنابراین هامیلتونی کل را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

(۱۵۱-۴)

$$\frac{H}{\hbar} = H_r+H_۱+H_۲+V_۱+V_۲ = \omega_r \hat{a}^\dagger \hat{a}+\frac{\Omega_۱}{۲}\sigma^z_۱+\frac{\Omega_۲}{۲}\sigma^z_۲+g_۱\left(\hat{a}^\dagger\sigma^-_۱+\hat{a}\sigma^+_۱\right)+g_۲\left(\hat{a}^\dagger\sigma^-_۲+\hat{a}\sigma^+_۲\right),$$

که در آن ω_r فرکانس رزوناتور است. می‌خواهیم با استفاده از تبدیل شریفر–ولف SW یک هامیلتونی مؤثر بسازیم؛ یعنی:

$$H_{\text{eff}} = e^S H e^{-S},$$

از طریق بسط اختلالی عملگر S. از اینجا به بعد، برای سادگی نمادگذاری، $\hbar$ را نادیده می‌گیریم و آن را برابر با ۱ می‌گذاریم.

۱. وقتی فرکانس‌های کیوبیت و فرکانس رزوناتور بسیار دور از تشدید هستند، پارامترهای کوچک و بی‌بُعد اختلال در مسئلهٔ ما چه هستند؟

۲. با یادآوری بسط اختلالی عملگر S در تبدیل SW،

$$V = [H_۰, S^{(۱)}], \qquad (۱۵۲\text{-}۴)$$

تأیید کنید که تقریب مرتبهٔ اول عملگر S برابر است با:

$$S^{(۱)} = \sum_{k=۱}^{۲} S_k^{(۱)} = \sum_{k=۱}^{۲} \lambda_k\left(\sigma^+_k\hat{a}-\hat{a}^\dagger\sigma^-_k\right), \qquad (۱۵۳\text{-}۴)$$

و مقدار λ_k را تعیین کنید. توجه کنید که زیروند k یعنی عملگر فقط روی کیوبیت k-ام عمل می‌کند.

۳. هامیلتونی مؤثر متناظر با تقریب مرتبهٔ اول $S^{(۱)}$ را به‌دست آورید و نشان دهید که این هامیلتونی، در میان جمله‌های دیگر، شامل کوپلینگ بین دو کیوبیت به فرم زیر است:

$$J\left(\sigma^+_۱\sigma^-_۲+\sigma^-_۱\sigma^+_۲\right), \qquad J=\frac{g_۱g_۲}{۲}\left(\frac{۱}{\Delta_۱}+\frac{۱}{\Delta_۲}\right), \qquad (۱۵۴\text{-}۴)$$

که در آن

$$\Delta_k = \Omega_k - \omega_r.$$

نتیجه را چگونه تفسیر می‌کنید؟ یعنی معنی همهٔ جمله‌های جدید چیست؟ در نتایج خود از تعریف

$$\chi_k = \frac{g_k^۲}{\Delta_k}$$

استفاده کنید.

پاسخ تمرین ۱.۷.۴

۱. رفتن به چارچوب چرخان با فرکانس ω_r برای هر کیوبیت و رزوناتور، نگاه کنید به تمرین ۴-۳، هامیلتونی زیر را می‌دهد:

$$\frac{\tilde{H}}{\hbar} = \sum_{k=۱,۲} H_{۰,k} + V_k, \qquad (۱۵۵\text{-}۴)$$

که در آن:

$$H_{\cdot,k} = \frac{\Omega_k - \omega_r}{۲}\sigma_k^z.$$

در این چارچوب چرخان، پارامترهای اختلالی روشن می‌شوند. می‌توانیم نظریهٔ اختلال را زمانی اعمال کنیم که شکاف در $H_{\cdot,k}$ بسیار بزرگ‌تر از شدت اختلال V_k باشد. شکاف برابر است با

$$|\omega_r - \Omega_k|,$$

در حالی که

$$\|V_k\| = \max_{\psi, \|\psi\|=۱} \sqrt{\langle\psi|V_k^\dagger V_k|\psi\rangle} = |g_k|\sqrt{n}.$$

یعنی اگر آن را روی حالت‌های فوک بالاتر ارزیابی کنیم، نرم افزایش می‌یابد. بنابراین لازم است:

$$\left|\frac{\sqrt{n}g_k}{\omega_r - \Omega_k}\right| \ll ۱, \qquad k = ۱, ۲, \tag{۱۵۶-۴}$$

تا تقریب زمانی کار کند که رزوناتور n برانگیختگی دارد. یک پاسخ کمتر دقیق این است که دست‌کم باید داشته باشیم:

$$\left|\frac{g_k}{\omega_r - \Omega_k}\right| \ll ۱, \qquad k = ۱, ۲. \tag{۱۵۷-۴}$$

۲. تحلیل SW را در چارچوب اصلی انجام می‌دهیم و به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}[H_\cdot, S^{(۱)}] &= \left[\omega_r\hat{a}^\dagger\hat{a} + \sum_{k=۱}^{۲} H_k, \sum_{k=۱}^{۲} S_k^{(۱)}\right] \\ &= \sum_{k=۱}^{۲}\left([\omega_r\hat{a}^\dagger\hat{a}, S_k^{(۱)}] + [H_k, S_k^{(۱)}]\right).\end{aligned} \tag{۱۵۸-۴}$$

باید دو نوع کموتاتور را محاسبه کنیم:

$$[\omega_r\hat{a}^\dagger\hat{a}, S_k^{(۱)}] = [\omega_r\hat{a}^\dagger\hat{a}, \lambda_k(\sigma_k^+\hat{a} - \hat{a}^\dagger\sigma_k^-)] = -\omega_r\lambda_k\left(\sigma_k^+\hat{a} + \hat{a}^\dagger\sigma_k^-\right), \tag{۱۵۹-۴}$$

و:

$$[H_k, S_k^{(۱)}] = \left[\frac{\Omega_k}{۲}\sigma_k^z, \lambda_k(\sigma_k^+\hat{a} - \hat{a}^\dagger\sigma_k^-)\right] = \Omega_k\lambda_k\left(\sigma_k^+\hat{a} + \hat{a}^\dagger\sigma_k^-\right). \tag{۱۶۰-۴}$$

بنابراین برای اینکه معادله (۴-۱۵۲) برقرار باشد، باید بگذاریم:

$$\lambda_k = \frac{g_k}{\Omega_k - \omega_r} = \frac{g_k}{\Delta_k}, \qquad k = ۱, ۲. \tag{۱۶۱-۴}$$

پس:

$$\chi_k = g_k\lambda_k.$$

۳. هامیلتونی مؤثر متناظر با بسط مرتبهٔ اول $S^{(1)}$ به‌صورت زیر است:

$$H_{\text{eff}} = H_0 + \frac{1}{2}[S^{(1)}, V]. \qquad (۴\text{-}۱۶۲)$$

بنابراین باید کموتاتور زیر را محاسبه کنیم:

$$[S^{(1)}, V] = \sum_{k=1}^{2}\sum_{k'=1}^{2}[S_k^{(1)}, V_{k'}]. \qquad (۴\text{-}۱۶۳)$$

دوباره باید دو نوع کموتاتور را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned}[S_k^{(1)}, V_k] &= \chi_k[\sigma_k^+\hat{a} - \hat{a}^\dagger\sigma_k^-, \sigma_k^+\hat{a} + \hat{a}^\dagger\sigma_k^-] \\ &= \chi_k\hat{a}\hat{a}^\dagger[\sigma_k^+, \sigma_k^-] - \chi_k\hat{a}^\dagger\hat{a}[\sigma_k^-, \sigma_k^+] \\ &= \chi_k\hat{a}\hat{a}^\dagger\sigma_k^z + \chi_k\hat{a}^\dagger\hat{a}\sigma_k^z = \chi_k\sigma_k^z + 2\chi_k\sigma_k^z\hat{a}^\dagger\hat{a}.\end{aligned} \qquad (۴\text{-}۱۶۴)$$

و برای $k' \neq k$:

$$[S_k^{(1)}, V_{k'}] = \frac{g_{k'}g_k}{\Delta_k}[\sigma_k^+\hat{a} - \hat{a}^\dagger\sigma_k^-, \sigma_{k'}^+\hat{a} + \hat{a}^\dagger\sigma_{k'}^-] = \frac{g_{k'}g_k}{\Delta_k}\left(\sigma_k^+\sigma_{k'}^- + \sigma_k^-\sigma_{k'}^+\right). \qquad (۴\text{-}۱۶۵)$$

پس هامیلتونی مؤثر زیر را به‌دست می‌آوریم:
(۴-۱۶۶)

$$H_{\text{eff}} = \frac{1}{2}(\Omega_1+\chi_1)\sigma_1^z+\frac{1}{2}(\Omega_2+\chi_2)\sigma_2^z+(\omega_r + \chi_1\sigma_1^z + \chi_2\sigma_2^z)\,\hat{a}^\dagger\hat{a}+J\left(\sigma_1^+\sigma_2^- + \sigma_1^-\sigma_2^+\right),$$

که در آن کوپلینگ را به‌صورت زیر تعریف کرده‌ایم:

$$J = \frac{g_1g_2}{2}\left(\frac{1}{\Delta_1} + \frac{1}{\Delta_2}\right). \qquad (۴\text{-}۱۶۷)$$

تفسیر نتیجه به این صورت است: هر دو کیوبیت یک جابه‌جایی در فرکانس اصلی خود، به‌ترتیب به‌اندازهٔ χ_1 و χ_2، دریافت می‌کنند. این جابه‌جایی معمولاً جابه‌جایی لمب Lamb shift نامیده می‌شود، زیرا جابه‌جایی‌ای در فرکانس یک اتم، مثلاً اتم هیدروژن، کوپل‌شده به میدان الکترومغناطیسی است که حتی وقتی میدان الکترومغناطیسی در حالت خلأ خود قرار دارد نیز رخ می‌دهد. علاوه بر این، فرکانس رزوناتور بسته به حالت کیوبیت k-ام به‌اندازهٔ $\pm\chi_k$ جابه‌جا می‌شود. این جمله جابه‌جایی پاشنده dispersive shift نامیده می‌شود. به‌صورت جایگزین، می‌توان این جمله را به‌عنوان جابه‌جایی فرکانس کیوبیت بسته به تعداد برانگیختگی‌ها در رزوناتور نیز دید؛ در این صورت، گاهی به آن جابه‌جایی AC-استارک AC-Stark shift گفته می‌شود. علاوه بر این، رزوناتور یک کوپلینگ تبادلی flip-flop بین کیوبیت‌ها را با پارامتر کوپلینگ J واسطه‌گری می‌کند؛ شدتی که با g_i در معادله (۴-۱۳۰) و با ناهماهنگی فرکانسی مطابق معادله (۴-۱۶۷) تغییر می‌کند.

در تمرین قبلی دیدید که رزوناتورها می‌توانند برای کوپل کردن کیوبیت‌ها از طریق برهم‌کنش

$$J(\sigma_1^+\sigma_2^- + \sigma_1^-\sigma_2^+)$$

استفاده شوند. برای این کوپلینگ flip-flop بین ترانسمون‌ها، چه از طریق برهم‌کنش مستقیم و چه از طریق یک رزوناتور گذرگاه، معمولاً وقتی کوپلینگ باید «روشن» باشد، مقدار هدف

$$J/2\pi = 5\text{–}20\ \text{MHz}$$

است. این شدت به‌طور غیرمستقیم سرعت اجرای گیت CZ بین دو ترانسمون کوپل‌شده از طریق یک رزوناتور گذرگاه را تعیین می‌کند؛ برای مثال، در مرجع [۹۶] زمان گیت CZ به‌دست‌آمده برابر با ۴۰ ns است.

تمرین ۴.۷.۲: بازخوانی پاشندهٔ یک کیوبیت ابررسانا

در معادله (۴-۱۳۳) در بخش ۴-۶ دیدیم که برهم‌کنش خطی یک سیستم دوترازی با یک مد رزوناتور را می‌توان با مدل جینز-کامینگز توصیف کرد. اگر علاوه بر این فرض کنیم که کیوبیت و رزوناتور بسیار دور از تشدید هستند، همانند تمرین ۴-۷، هامیلتونی جینز–کامینگز در معادله (۴-۱۳۳) را می‌توان تا مرتبهٔ دوم در نظریهٔ اختلال، با هامیلتونی پاشندهٔ زیر تقریب زد:

$$H_{\text{disp}} = \frac{\hbar}{۲}(\Omega + \chi)\sigma_z + \hbar(\omega_r + \chi\sigma_z)\hat{a}^\dagger\hat{a}, \qquad (۴\text{-}۱۶۸)$$

که در آن:

$$\chi = \frac{g^۲}{\Delta}, \qquad \Delta = \Omega - \omega_r.$$

در عمل، جابه‌جایی پاشنده معمولاً در بازهٔ

$$\chi/۲\pi = ۰{,}۵\text{–}۱۰ \text{ MHz}$$

قرار دارد؛ بنابراین در مقایسه با فرکانس ترانسمون کوچک است. حال سناریویی را در نظر بگیرید که در آن مد رزوناتور به‌صورت ضعیف و خازنی به یک خط انتقال نیمه‌بی‌نهایت کوپل شده است و می‌توانیم از فرمالیسم ورودی-خروجی که در بخش ۴-۵ بحث شد استفاده کنیم. این کار به معادلات (۴-۱۲۰)، (۴-۱۲۱) و (۴-۱۲۲) منجر می‌شود که در اینجا آن‌ها را تحلیل می‌کنیم.

۱. دو حالت را در نظر بگیرید که کیوبیت یا در حالت برانگیخته $|e\rangle$ است، یا در حالت پایه $|g\rangle$. با گرفتن تبدیل فوریه از معادلات (۴-۱۲۰) و (۴-۱۲۲) نشان دهید که تبدیل فوریهٔ میدان خروجی $\hat{b}_{\text{out}}[\omega]$ به میدان ورودیِ تبدیل فوریه‌شده به‌صورت زیر مربوط است:

$$\hat{b}_{\text{out}}[\omega] = r_{e,g}(\omega)\hat{b}_{\text{in}}[\omega], \qquad (۴\text{-}۱۶۹)$$

که در آن ضریب بازتاب $r_{e,g}(\omega)$ قدر مطلقی برابر با ۱ دارد. فاز ضریب بازتاب را بسته به حالت کیوبیت به‌دست آورید. در اینجا تبدیل فوریهٔ یک عملگر هایزنبرگ عمومی $A(t)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\hat{A}[\omega] = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{i\omega t}\hat{A}(t). \qquad (۴\text{-}۱۷۰)$$

۲. فرض کنید حالت ورودی در $t = t_۰ = ۰$ یک حالت همدوس چندمدی باشد که با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$|\Psi_{\text{in}}\rangle = |\{\alpha(\omega)\}\rangle = D(\{\alpha(\omega)\})|۰\rangle,$$

که در آن از عملگر جابه‌جایی پیوسته استفاده می‌کنیم:

$$D(\{\alpha(\omega)\}) = \exp\left[\int_۰^\infty d\omega\left(\alpha(\omega)\hat{b}^\dagger_\omega - \alpha^*(\omega)\hat{b}_\omega\right)\right], \qquad (۴\text{-}۱۷۱)$$

که در آن $\alpha(\omega)$ تابع پوش، و $|۰\rangle$ حالت خلأ برای همهٔ مدها است. با توجه به نتیجهٔ سؤال ۱، مقدار $\langle\hat{b}_{\text{out}}[\omega]\rangle$ را وقتی کیوبیت در حالت e یا g است محاسبه کنید. تابع پوش $\alpha(\omega)$ باید حول چه مقدار ω_c متمرکز شود تا میدان خروجی وابستگی زیادی به حالت کیوبیت داشته باشد؟

راهنمایی: خاصیت زیر را به یاد داشته باشید

$$D^\dagger(\{\alpha(\omega)\})\hat{b}_{\omega'}D(\{\alpha(\omega)\}) = \hat{b}_{\omega'} + \alpha(\omega'). \qquad (۴\text{-}۱۷۲)$$

۳. با استفاده از تبدیل فوریهٔ معادله (۴-۱۲۰) و با فرض اینکه کیوبیت یا در حالت e یا در حالت g قرار دارد، عبارتی برای $\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)$ به‌دست آورید که امیدریاضی آن، تعداد فوتون‌های رزوناتور برحسب زمان است؛ یعنی:

$$\bar{n}(t) = \langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)\rangle.$$

با استفاده از نتیجهٔ سؤال قبل، $\bar{n}(t)$ را برای

$$\alpha(\omega) = \alpha\sqrt{۲\pi}\delta(\omega-\omega_c)$$

در حالت چندمدی ورودی $|\Psi_{\rm in}\rangle$ تعیین کنید.

پاسخ تمرین ۲.۷.۴

۱. فرض کنید کیوبیت در حالت برانگیخته $|e\rangle$ باشد. در این زیرفضا، مد رزوناتور همچنان مانند یک نوسانگر هماهنگ رفتار می‌کند، اما با فرکانس جابه‌جاشده:

$$\omega_e = \omega_r + \chi.$$

اگر کیوبیت در حالت $|g\rangle$ باشد، فرکانس رزوناتور برابر است با:

$$\omega_g = \omega_r - \chi.$$

در نتیجه، در تصویر هایزنبرگ انتظار داریم عملگر $\hat{a}$ بسته به حالت کیوبیت به‌صورت متفاوتی تکامل یابد و یک میدان خروجی وابسته به حالت کیوبیت تولید کند. با گرفتن تبدیل فوریه از معادلهٔ تکامل در تصویر هایزنبرگ برای $\hat{a}(t)$، به‌سادگی به‌دست می‌آوریم:

$$-i\omega\hat{a}[\omega] = -i\omega_{e/g}\hat{a}[\omega] - \frac{\kappa}{۲}\hat{a}[\omega] + \sqrt{\kappa}\hat{b}_{\rm in}[\omega], \qquad (۴\text{-}۱۷۳)$$

که بلافاصله نتیجه می‌دهد:

$$\hat{a}[\omega] = \frac{\sqrt{\kappa}\hat{b}_{\rm in}[\omega]}{i(\omega_{e/g}-\omega)+\kappa/۲}. \qquad (۴\text{-}۱۷۴)$$

از رابطهٔ ورودی-خروجیِ تبدیل فوریه‌شده

$$\hat{b}_{\rm out}[\omega] = \sqrt{\kappa}\hat{a}[\omega] - \hat{b}_{\rm in}[\omega]$$

به‌دست می‌آوریم:

$$\hat{b}_{\rm out}[\omega] = \frac{\kappa/۲ - i(\omega_{e/g}-\omega)}{\kappa/۲ + i(\omega_{e/g}-\omega)}\hat{b}_{\rm in}[\omega] = r_{e/g}(\omega)\hat{b}_{\rm in}[\omega], \qquad (۴\text{-}۱۷۵)$$

که در آن ضریب بازتاب را به‌صورت زیر تعریف کرده‌ایم:

$$r_{e/g}(\omega) = \frac{\kappa/۲ + i(\omega-\omega_{e/g})}{\kappa/۲ - i(\omega-\omega_{e/g})}. \qquad (۴\text{-}۱۷۶)$$

ضریب بازتاب به‌وضوح قدر مطلقی برابر با یک دارد، زیرا از فرم کلی

$$r_e = \frac{C+iD}{C-iD}$$

است، با فاز

$$\theta = \arctan\left(\frac{-۲CD}{C^۲ - D^۲}\right) = -\arctan\left(\frac{۲CD}{C^۲ - D^۲}\right).$$

می‌توانیم از فرمول زیر استفاده کنیم:

$$\frac{۱}{۲}\arctan\left(\frac{۲x}{۱ - x^۲}\right) = \arctan x, \qquad (۱۷۷\text{-}۴)$$

تا به‌دست آوریم:

$$r_{e/g}(\omega) = e^{i\theta_{e/g}(\omega)}, \qquad (۱۷۸\text{-}۴)$$

که در آن:

$$\theta_{e/g}(\omega) = -۲\arctan\left[\frac{۲(\omega - \omega_{e/g})}{\kappa}\right] = -۲\arctan\left[\frac{۲(\omega - \omega_r)}{\kappa} \pm \frac{۲\chi}{\kappa}\right]. \qquad (۱۷۹\text{-}۴)$$

۲. با استفاده از معادله (۴-۱۷۲) داریم:

$$\langle\Psi_{\text{in}}|\hat{b}_\omega(t_. = ۰)|\Psi_{\text{in}}\rangle = \alpha(\omega),$$

زیرا:

$$\langle ۰|\hat{b}_{\omega'}|۰\rangle = ۰.$$

اکنون امیدریاضی عملگر $\hat{b}_{\text{out}}[\omega]$ را می‌نویسیم و محاسبه می‌کنیم:

$$\langle\Psi_{\text{in}}|\hat{b}_{\text{out}}[\omega]|\Psi_{\text{in}}\rangle = \langle\Psi_{\text{in}}|r_{e/g}(\omega)\hat{b}_{\text{in}}[\omega]|\Psi_{\text{in}}\rangle$$

$$= \frac{-r_{e/g}(\omega)}{۲\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{i\omega t}\int d\omega'\, e^{-i\omega' t}\langle\Psi_{\text{in}}|\hat{b}_{\omega'}(t_. = ۰)|\Psi_{\text{in}}\rangle.$$

در اینجا از تعریف معادله (۴-۱۲۰) و تبدیل فوریه استفاده کرده‌ایم. با استفاده از رابطهٔ

$$\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{i\omega t} = \delta(\omega),$$

به‌دست می‌آوریم:

$$\langle\hat{b}_{\text{out}}[\omega]\rangle = -r_{e/g}(\omega)e^{i\omega t_.}\alpha(\omega). \qquad (۱۸۰\text{-}۴)$$

از نتیجهٔ بخش اول تمرین می‌دانیم که تابع‌های $r_{e,g}(\omega)$ برای مقدارهای ω نزدیک به فرکانس بدون کوپلینگ کاواک ω_r به حالت کیوبیت بسیار حساس هستند. به همین دلیل، می‌خواهیم میدان خروجی این وابستگی را نشان دهد. نتیجه می‌گیریم که تابع پوش $\alpha(\omega)$ باید به‌ویژه در نزدیکی مقدارهای نزدیک به ω_r پیک داشته باشد. معمولاً فرکانس حامل یا مرکزی را برابر با فرکانس بدون کوپلینگ کاواک ω_r انتخاب می‌کنند و یک پروفایل فرکانسی باریک در اطراف آن در نظر می‌گیرند که متناظر با شکل پالس است.

۳. از معادله (۴-۱۷۴) و با تبدیل فوریهٔ معکوس، داریم:

$$\bar{n}(t) = \langle\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)\rangle = \frac{۱}{۲\pi}\int d\omega\int d\omega'\, e^{it(\omega-\omega')}\frac{\kappa\langle\hat{b}^\dagger_{\text{in}}[\omega]\hat{b}_{\text{in}}[\omega']\rangle}{\left(\kappa/۲ - i(\omega_{e/g} - \omega)\right)\left(\kappa/۲ + i(\omega_{e/g} - \omega')\right)}.$$

دوباره از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$\hat{b}_{\rm in}[\omega] = \frac{-۱}{۲\pi} \int dt\, e^{i\omega t} \int d\omega'\, e^{-i\omega'(t-t.)} \hat{b}_{\omega'}(t.) = -\hat{b}_{\omega}(t. = ۰).$$

توجه کنید که علامت منفی فقط به قرارداد تعریف $\hat{b}_{\rm in}$ برمی‌گردد. بنابراین داریم:

$$\langle \Psi_{\rm in} | \hat{b}^{\dagger}_{\omega}(t. = ۰) \hat{b}_{\omega'}(t. = ۰) | \Psi_{\rm in} \rangle = \langle ۰ | (\hat{b}^{\dagger}_{\omega} + \alpha^*(\omega))(\hat{b}_{\omega'} + \alpha(\omega')) | ۰ \rangle$$
$$= \alpha^*(\omega)\alpha(\omega') = |\alpha|^۲ ۲\pi \delta(\omega - \omega_c)\delta(\omega' - \omega_c).$$

این نتیجه می‌دهد:

$$\bar{n}(t) = \frac{\kappa |\alpha|^۲}{\kappa^۲/۴ + (\omega_{e/g} - \omega_c)^۲}.$$

این مقدار، تعداد فوتون‌های حالت پایدار در رزوناتور است. وقتی ω_c برابر با ω_e باشد، یعنی کیوبیت در حالت e قرار داشته باشد، یا برابر با ω_g باشد، یعنی کیوبیت در حالت g قرار داشته باشد، این تعداد فوتون بیشینه می‌شود، یعنی رانش در تشدید انجام می‌شود. این مقدار فقط به κ و دامنهٔ α موج تخت بستگی دارد.

فصل ۵

شبکه‌های خطی و کوانتیزه‌سازی جعبه‌سیاه

برای به‌دست‌آوردن لاگرانژی و هامیلتونی یک مدار، تاکنون به‌طور ضمنی فرض کرده‌ایم که نمایش مدار با عناصر فشرده برای سیستم ما در دسترس و دقیق است. روشن است که این فرض همیشه برقرار نیست؛ برای مثال، زمانی که یک کیوبیت ترانسمون داخل یک کاواک مایکروویوی مستطیلی سه‌بعدی قرار داده می‌شود [۷۲].

در این مرحله، نباید فوراً بدیهی باشد که چگونه می‌توان برای چنین سیستمی یک هامیلتونی استخراج کرد، و مهم‌تر از آن، آیا اصلاً یک نمایش مدار الکتریکی برای مسئله وجود دارد یا نه. نظریه زیربنایی افزاره‌ها و تراشه‌های ابررسانا، در اصل، الکترودینامیک کوانتومی است؛ یعنی مجموعه‌ای پیوسته از مُدها که با ماده ابررسانا برهم‌کنش دارند. از سوی دیگر، یک مدار الکتریکی محدود همیشه تعداد محدودی مُد دارد؛ هرچند می‌توان حدی را در نظر گرفت که تعداد مُدها به بی‌نهایت میل کند، مانند خط انتقالی که در فصل قبل بررسی شد.

با داشتن پیش‌زمینه فیزیک یا مهندسی برق، باید دانست که ساختارهای مایکروویوی پیوسته معمولاً بر حسب پارامترهای پراکندگی توصیف می‌شوند؛ مفهومی که در بخش ۵-۱-۳ مرور می‌کنیم. با شبیه‌سازی عددی ساختارهای مایکروویوی طراحی‌شده، با استفاده از ابزارهای نرم‌افزاری تحلیل الکترومغناطیسی، می‌توان پارامترهایی مانند امپدانس، یا ماتریس امپدانس، را به‌عنوان تابعی از فرکانس تعیین کرد؛ پارامترهایی که مستقیماً با پارامترهای پراکندگی مرتبط‌اند. این پارامترها دانش کاملی از رفتار سیستم را نمایش می‌دهند. بنابراین انتظار داریم اگر فرمول‌بندی هامیلتونی یا لاگرانژی وجود داشته باشد، باید بتوان آن را از همین پارامترها استخراج کرد. در این فصل نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان این کار را با روشی به نام کوانتش جعبه‌سیاه، یا black-box quantization، انجام داد؛ روشی که در بخش ۵-۲ بررسی می‌شود و در اینجا نسبت به معرفی اولیه آن در مرجع [۹۷] گسترش داده شده است. در این روش، لزوماً نیازی نیست از لاگرانژی سیستم عبور کنیم، بلکه می‌توان هامیلتونی را مستقیماً استخراج کرد.

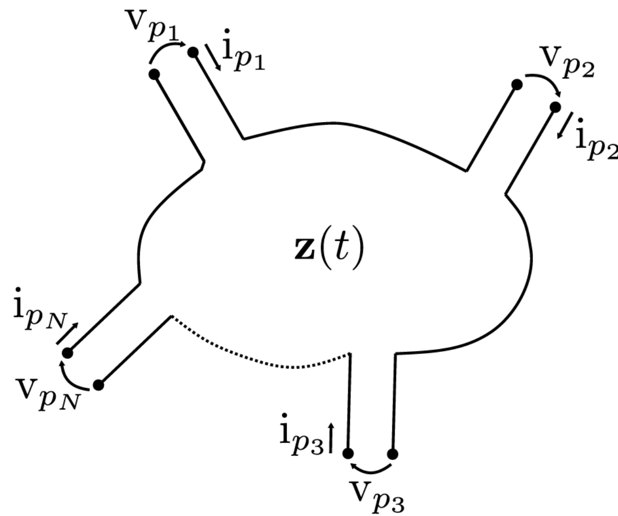
شرکت IBM نرم‌افزاری برای طراحی افزاره‌های کوانتومی توسعه داده است که با نام Qiskit Metal شناخته می‌شود. این نرم‌افزار از شبیه‌سازی الکترومغناطیسی به‌عنوان ورودی استفاده می‌کند و در نشانی زیر در دسترس است:

https://qiskit.org/metal/

این روش بر پایه مدل‌سازی نسبت مشارکت، یا participation ratio modeling، است که در مرجع [۹۸] پیشنهاد شده و در بخش ۵-۲-۱ درباره آن بحث خواهیم کرد. ابزار نرم‌افزاری دیگری نیز برای تبدیل پارامترهای به‌دست‌آمده از شبیه‌سازی‌های الکترومغناطیسی به توصیف هامیلتونی، شامل اتلاف‌ها، در مرجع [۹۹] توسعه داده شده است. چند تمرین با استفاده از این نرم‌افزار در بخش ۵-۴ ارائه شده‌اند.

۵-۱ شبکه‌های LTI

در این بخش، مقدمه‌ای کوتاه بر شبکه‌های خطیِ تغییرناپذیر با زمان، یا linear time-invariant (LTI)، ارائه می‌کنیم. اگرچه این مفهوم را می‌توان به هر شبکه‌ای اعمال کرد که در آن تعدادی ورودی و تعدادی خروجی داشته باشیم، در اینجا فقط حالتی را در نظر می‌گیریم که ورودی‌ها و خروجی‌ها یا جریان هستند یا ولتاژ.



شکل ۵-۱: شبکه الکتریکی N-پورتی با ولتاژ $\mathbf{v}_{p_i}$ روی پورت p_i و جریان $\mathbf{i}_{p_i}$ که به پورت p_i وارد و از آن خارج می‌شود.

در شکل ۵-۱، یک شبکه الکترومغناطیسی عمومی N-پورتی را نشان می‌دهیم. می‌توان یک پورت را به‌صورت یک جفت پایانه در نظر گرفت که بین آن‌ها ولتاژ به‌خوبی تعریف شده است؛ به‌طوری‌که جریانی که از یک پایانه وارد می‌شود، برابر با جریانی است که از پایانه دیگر خارج می‌شود. برای بحث کامل‌تر درباره مفهوم پورت، خواننده را به بخش ۶-۱ و فصل ۴ از مرجع [۷۴] ارجاع می‌دهیم.

فرض کنید $v(t)$ و $i(t)$ به‌ترتیب بردارهای N-بعدی ولتاژهای پورت و جریان‌های پورت در زمان t باشند. یک شبکه الکترومغناطیسی عمومی، $v(t)$ و $i(t)$ را با یک قاعده مشخص به هم مرتبط می‌کند. وقتی جریان‌ها ورودی و ولتاژها خروجی باشند، یک شبکه الکتریکی LTI جریان‌ها و ولتاژها را از طریق یک کانولوشن به هم مرتبط می‌کند؛ یعنی:

$$\mathbf{v}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, \mathbf{z}(t-\tau)\mathbf{i}(\tau). \qquad (۱.۵)$$

ماتریس $N \times N$ یعنی $\mathbf{z}(t)$، ماتریس امپدانس در حوزه زمان نامیده می‌شود؛ واحد آن اهم بر ثانیه است. این‌که $\mathbf{z}$ فقط به $t-\tau$ وابسته است، تغییرناپذیری زمانی پاسخ را نشان می‌دهد. اگر به‌جای آن، نقش ورودی‌ها و خروجی‌ها را جابه‌جا کنیم، خواهیم داشت:

$$\mathbf{i}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, \mathbf{y}(t-\tau)\mathbf{v}(\tau), \qquad (۲.۵)$$

که در آن $\mathbf{y}(t)$ ماتریس ادمیتانس در حوزه زمان نامیده می‌شود؛ واحد آن زیمنس بر ثانیه، یا معکوسِ اهم ضرب‌در ثانیه، است.

درایه‌های ماتریس $\mathbf{z}(t)$ تفسیر ساده‌ای دارند. به‌طور مشخص، $z_{kl}(t)$ ولتاژ $v_k(t)$ است، زمانی که یک جریان دلتا دیراک $\delta(t)$ به پورت l اعمال شود و همه جریان‌های پورت‌های دیگر صفر باشند؛ یعنی پورت‌های دیگر مدار باز باشند. بنابراین، $\mathbf{z}(t)$ تفسیر تابع پاسخ ضربه‌ای را دارد. به‌طور مشابه، $y_{kl}(t)$ جریان $i_k(t)$ است، زمانی که یک ولتاژ دلتا دیراک $\delta(t)$ به پورت l اعمال شود و همه ولتاژهای پورت‌های دیگر صفر باشند؛ یعنی پورت‌های دیگر اتصال کوتاه باشند. معادله تعریف‌کننده یک شبکه LTI، یعنی رابطه (۱.۵)، با هدف دربرگرفتن اثرهای تأخیری در سیستم نوشته می‌شود، در حالی که رابطه همچنان نسبت به ورودی خطی باقی می‌ماند.

می‌توان استدلال کرد که رابطه‌ای مانند (۱.۵) برای ورودی‌ها و خروجی‌های عمومی، توصیف خوبی برای

بسیاری از سیستم‌هاست.[1] با این حال، رابطه (۱.۵) هنوز خاصیتی را مجاز می‌داند که کاملاً بی‌معناست: انتظار نداریم ورودی‌ای در زمان t، بتواند روی خروجی در زمان $t' < t$ اثر بگذارد، در حالی که رابطه (۱.۵) چنین چیزی را همچنان مجاز می‌داند. بنابراین، شرط اضافی علیت را به شبکه اضافه می‌کنیم. این شرط را می‌توان بر حسب تابع پاسخ ضربه‌ای به‌صورت زیر بیان کرد:[2]

$$\forall t < ۰, \quad \mathbf{z}(t) = ۰, \qquad \forall t < ۰, \quad \mathbf{y}(t) = ۰. \tag{۳.۵}$$

توجه کنید که این شرط نتیجه می‌دهد حد بالای انتگرال‌های کانولوشن در روابط (۱.۵) و (۲.۵) را می‌توان به‌جای $+\infty$، برابر با t گرفت. خواننده علاقه‌مند می‌تواند بحث بیشتر درباره علیت در شبکه‌های LTI را در مرجع [۱۰۰] مطالعه کند. همچنین توجه می‌کنیم که چون پاسخ شبکه الکتریکی خطی است، استفاده از پیوندهای جوزفسون را در داخل شبکه منتفی می‌کند؛ این‌ها دقیقاً همان عناصری هستند که می‌توان آن‌ها را به پورت‌ها متصل کرد. شبکه در غیر این صورت می‌تواند اتلافی، یعنی شامل مقاومت‌ها، یا بی‌اتلاف باشد.

۵-۱-۱ حوزه‌ی لاپلاس و فوریه

به‌جای استفاده از ماتریس‌های امپدانس و ادمیتانسِ وابسته به زمان، رایج‌تر است که این ماتریس‌ها در حوزه لاپلاس و فوریه به‌کار برده شوند؛ چیزی که در اینجا تعریف می‌کنیم. فرض کنید $f(t)$ یک بردار وابسته به زمانِ عمومی با مؤلفه‌های

$$f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$$

باشد. تبدیل لاپلاس دوسویه‌ی $f(t)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-st} f(t), \qquad s = \sigma + i\omega \in \mathbb{C}. \tag{۴.۵}$$

تبدیل لاپلاس فقط در ناحیه‌ای موسوم به ناحیه همگرایی، یا region of convergence (ROC)، تعریف می‌شود؛ یعنی ناحیه‌ای از صفحه مختلط که در آن انتگرال رابطه (۴.۵) همگرا است. حوزه فوریه را می‌توان به‌عنوان حالت خاصی از حوزه لاپلاس با $\sigma = ۰$ در نظر گرفت. از نمادگذاری زیر استفاده خواهیم کرد:

$$\mathcal{F}(\omega) = F(i\omega), \qquad \omega \in \mathbb{R}. \tag{۵.۵}$$

با استفاده از قضیه کانولوشن برای تبدیل لاپلاس یا فوریه، رابطه (۱.۵) در حوزه لاپلاس به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$V(s) = Z(s) I(s), \tag{۶.۵}$$

و به‌طور مشابه، رابطه (۲.۵) می‌دهد:

$$I(s) = Y(s) V(s), \tag{۷.۵}$$

که از آن می‌توان نتیجه گرفت:

$$Z(s) = Y^{-۱}(s). \tag{۸.۵}$$

[1] بسیاری از سیستم‌های ورودی–خروجی، نه فقط سیستم‌های الکترومغناطیسی، را می‌توان با تقریب خوبی به‌عنوان سیستم‌های LTI در نظر گرفت. برای نمونه، می‌توان پدیده‌ای را در نظر گرفت که مدتی بر زندگی روزمره ما اثرگذار بود: به‌عنوان ورودی، متغیری را در نظر می‌گیریم که شدت اقدامات دولت برای محدود کردن گسترش COVID-19 را کمّی می‌کند؛ و به‌عنوان خروجی، متغیری را در نظر می‌گیریم که اثر این اقدامات را کمّی می‌کند، مانند کاهش تعداد موارد ابتلا. همان‌طور که از تجربه می‌دانیم، اگر دولت در زمان t اقدامی اعمال کند، تنها پس از یک زمان مشخصه t_c بر کاهش موارد اثر خواهد گذاشت. افزون بر این، انتظار داریم دست‌کم برای اقدامات ملایم، سیستم نسبت به ورودی به‌صورت خطی رفتار کند، در حالی که برای اقدامات شدید باید انتظار اشباع داشته باشیم. بنابراین، اگر اقدامات ملایم باشند، انتظار داریم یک رابطه کانولوشنی بتواند رفتار سیستم را توصیف کند و در نتیجه سیستم تقریباً مانند یک سیستم LTI رفتار کند. نمونه‌های بسیار دیگری نیز وجود دارند که در آن‌ها استدلال مشابهی برقرار است؛ همین موضوع توضیح می‌دهد که چرا شبکه‌های LTI در طبیعت فراوان‌اند.

[2] توجه کنید که در اینجا علیت آنی را فرض می‌کنیم، در حالی که در اصل باید سرعت نور را نیز در نظر گرفت.

نکته‌ای درباره واحدها: واحد $V(s)$ برابر ولت ضرب‌در ثانیه است، نه صرفاً ولت؛ واحد $I(s)$ آمپر ضرب‌در ثانیه است؛ واحد $Z(s)$ اهم است؛ و واحد $Y(s)$ برابر ۱/اهم است.

در قیاس نزدیک با حالت حوزه زمان، می‌توان تفسیری برای درایه‌های ماتریس $Z_{kl}(s)$ از ماتریس امپدانس در حوزه لاپلاس ارائه کرد. این درایه برابر نسبت میان $V_k(s)$ و $I_l(s)$ است، زمانی که همه پورت‌ها به‌جز پورت l مدار باز باشند. از نظر ریاضی، این به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$Z_{kl}(s) = \left.\frac{V_k(s)}{I_l(s)}\right|_{I_k(s)=۰,\ k\neq l}. \qquad (۹.۵)$$

به‌طور مشابه، زمانی که همه پورت‌ها به‌جز پورت l اتصال کوتاه باشند، یعنی

$$V_{k\neq l}(s) = ۰,$$

و ولتاژ $V_l(s)$ اعمال شود، پاسخ جریانی آن توسط رابطه زیر توصیف می‌شود:

$$Y_{kl}(s) = \left.\frac{I_k(s)}{V_l(s)}\right|_{V_k(s)=۰,\ k\neq l}. \qquad (۱۰.۵)$$

همچنین باید اشاره کرد که برای یک مدار N-پورتی دلخواه، ماتریس امپدانس یا ادمیتانس همیشه وجود ندارد. برای مثال، مدار می‌تواند به‌گونه‌ای باشد که

$$i_l(t) \neq ۰$$

الزاماً به این معنا باشد که

$$i_k(t) \neq ۰$$

مانند یک ترانسفورمر، که یک عنصر دوپورتی است؛ بخش ؟؟ را ببینید. در این حالت، رابطه (۹.۵) خوش‌تعریف نیست و در نتیجه ماتریس امپدانس وجود نخواهد داشت. در بخش ۶-۱، تفسیر فیزیکی درایه‌های ماتریس ادمیتانس در حوزه فوریه را در ارتباط با خاصیت نادوسویگی بررسی می‌کنیم.

۵-۱-۲ تک‌درگاهی

در حالتی که تنها یک پورت وجود داشته باشد، یعنی

$$N = ۱,$$

شبکه می‌تواند یک شاخه دوپایانه‌ای منفرد باشد، یا می‌تواند نشان‌دهنده یک شبکه عمومی‌تر باشد که تنها از طریق همین تک‌پورت به آن دسترسی داریم. بنابراین داریم:

$$V(s) = Z(s)I(s),$$

و

$$I(s) = Y(s)V(s),$$

در نتیجه از نظر تابعی:

$$Z(s) = Y^{-۱}(s).$$

ابتدا امپدانس و ادمیتانس برخی عناصر ساده را مرور می‌کنیم و می‌بینیم که چگونه ساخته می‌شوند. اگر شاخه یک القاگر L باشد و داشته باشیم:

$$v(t) = \frac{d\Phi}{dt} = L\frac{di}{dt},$$

آنگاه امپدانس آن با تبدیل لاپلاس به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

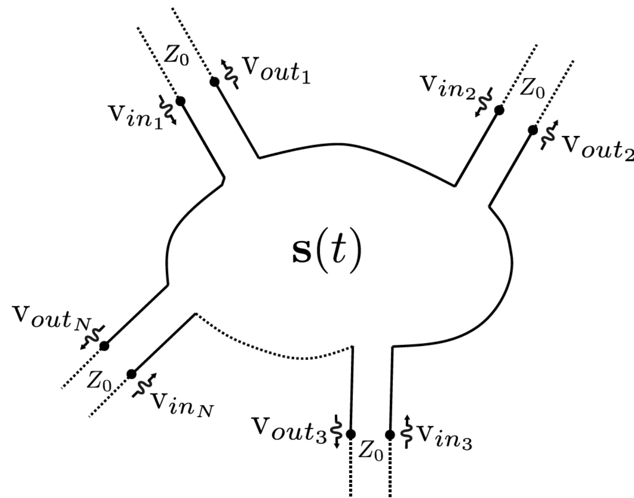
$$Z(s) = sL,$$

و بنابراین:

$$Y(s) = \frac{۱}{sL}.$$

برای یک خازن C، داریم:

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}.$$



شکل ۵-۲: شبکه الکتریکی N-پورتی که در پورت‌های آن خطوط انتقال متصل شده‌اند. پاسخ شبکه به تابش ورودی با ماتریس پراکندگی $\mathrm{s}(t)$ مشخص می‌شود. ولتاژ روی خط انتقال k، مجموع ولتاژ ورودی $v_{\mathrm{in,k}}(t)$ و ولتاژ خروجی $v_{\mathrm{out,k}}(t)$ است؛ همان‌طور که در بخش ۴-۴ بحث شده است.

بنابراین:

$$Y(s) = sC,$$

در حالی که:

$$Z(s) = \frac{۱}{sC}.$$

می‌بینیم که برای این شاخه‌ها

$$Z(i\omega) = \mathcal{Z}(\omega)$$

کاملاً موهومی است. برای یک مقاومت داریم:

$$v(t) = i(t)R,$$

پس:

$$\mathcal{Z}(\omega) = R$$

حقیقی است.

برای یک شبکه خطی عمومی، امپدانس آن را می‌توان از اجزای تشکیل‌دهنده‌اش ساخت. برای این کار باید به یاد داشته باشیم که امپدانس‌های $Z_۱$ و $Z_۲$، مانند مقاومت‌ها، وقتی به‌صورت سری قرار می‌گیرند با هم جمع می‌شوند؛ یعنی:

$$Z = Z_۱ + Z_۲.$$

وقتی به‌صورت موازی قرار گیرند، می‌توانیم از رابطه زیر استفاده کنیم:

$$\frac{۱}{Z} = \frac{۱}{Z_۱} + \frac{۱}{Z_۲},$$

و در نتیجه:

$$Z = \frac{Z_۱ Z_۲}{Z_۱ + Z_۲}.$$

برای ادمیتانس‌ها، عکس این روند به‌طور طبیعی برقرار است. از این نتیجه می‌شود که برای یک شبکه خطی عمومی، بی‌اتلاف و غیرفعال، یعنی شبکه‌ای که از القاگرها و خازن‌ها تشکیل شده باشد،

$$Z(i\omega)$$

کاملاً موهومی است.

تمرین ۱.۱.۵

خودتان بررسی کنید که ادمیتانس یک نوسانگر LC برابر است با:

$$\mathcal{Y}(\omega) = i\omega C + \frac{۱}{i\omega L} = \frac{۱ - \omega^۲ LC}{i\omega L}. \qquad (۱۱.۵)$$

پاسخ تمرین ۱.۱.۵

ادمیتانس‌های القاگر و خازن با هم جمع می‌شوند.

برای نوسانگر LC، می‌بینیم که $\mathcal{Y}(\omega)$ در فرکانس تشدید زیر صفر دارد:

$$\omega_r = \frac{۱}{\sqrt{LC}},$$

و به‌طور معادل،

$$\mathcal{Z}(\omega) = \mathcal{Y}^{-۱}(\omega)$$

در همین فرکانس تشدید دارای قطب است. همان‌طور که مشخص می‌شود، یک شبکه خطی تک‌پورتی، بی‌اتلاف و غیرفعال را همیشه می‌توان به‌صورت مجموعه‌ای سری از نوسانگرهای LC نمایش داد، که به قضیه فاستر معروف است. در بخش ۵-۲-۲ و پیوست ۱۰-۳ دوباره به این موضوع بازمی‌گردیم. ایده اصلی این است که صفرهای $\mathcal{Y}(\omega)$ همان فرکانس‌های تشدید این نوسانگرهای LC هستند.

۵-۱-۳ ماتریس پراکندگی

تاکنون هیچ فرضی درباره ماهیت سیستمی که به پورت‌های شبکه متصل می‌شود، انجام نداده‌ایم. این سیستم می‌تواند صرفاً یک منبع جریان باشد، یا می‌تواند یک عنصر غیرخطی، مانند یک پیوند جوزفسون، باشد؛ همان‌طور که در روش کوانتش جعبه‌سیاه در بخش ۵-۲ بررسی خواهیم کرد. با این حال، مفید است ابتدا حالتی را در نظر بگیریم که در آن خطوط انتقال را به پورت‌های شبکه متصل می‌کنیم؛ همان‌طور که در شکل ۵-۲ نشان داده شده است. در این حالت، شبکه خطی موج‌های الکترومغناطیسی ورودی را به موج‌های الکترومغناطیسی خروجی پراکنده می‌کند. این فرآیند با یک ماتریس پراکندگی $\mathbf{s}$ توصیف می‌شود که به‌صورت زیر تعریف می‌گردد.

فرض کنید $\mathbf{v}_{\mathrm{in}}(t)$ و $\mathbf{v}_{\mathrm{out}}(t)$ به‌ترتیب بردارهای ولتاژهای ورودی و خروجی روی خطوط انتقالی باشند که به پورت‌ها متصل شده‌اند. ولتاژهای خروجی $\mathbf{v}_{\mathrm{out}}(t)$ و ولتاژهای ورودی $\mathbf{v}_{\mathrm{in}}(t)$ با یک رابطه کانولوشنی به هم مرتبط‌اند:

$$\mathbf{v}_{\mathrm{out}}(t) = \int_{-\infty}^{t} d\tau\, \mathbf{s}(t-\tau)\mathbf{v}_{\mathrm{in}}(t), \qquad (۱۲.۵)$$

که در آن $\mathbf{s}(t)$ ماتریس پراکندگی در حوزه زمان نامیده می‌شود. در حوزه لاپلاس، رابطه (۱۲.۵) می‌دهد:

$$V_{\text{out}}(s) = S(s)V_{\text{in}}(s).$$

اکنون می‌خواهیم ماتریس پراکندگی $S(s)$ را به ماتریس امپدانس $Z(s)$ و ماتریس ادمیتانس $Y(s)$ شبکه مرتبط کنیم. در یک پورت منفرد، ولتاژ کل برابر است با:

$$v(t) = v_{\text{in}}(t) + v_{\text{out}}(t),$$

و جریان کل برابر است با:

$$i(t) = i_{\text{in}}(t) - i_{\text{out}}(t).$$

در اینجا قرارداد را چنین می‌گیریم که i_{in} و i_{out} به‌ترتیب جریان متناظر با موج ورودی و موج خروجی باشند. برای یک خط انتقال، رابطه بین ولتاژ و جریان به‌صورت زیر است:

$$v_{\text{in}}(t) = Z.i_{\text{in}}(t), \qquad v_{\text{out}}(t) = Z.i_{\text{out}}(t),$$

که در آن $Z.$ امپدانس مشخصه خط انتقال است؛ همان‌طور که در رابطه (۴-۶۶)، در بخش ۴-۴ نشان داده شده است. این روابط، برای همه پورت‌ها، روابط برداری زیر را نتیجه می‌دهند:

$$\mathbf{v}_{\text{in}}(t) = \frac{\mathbf{v}(t) + Z.\mathbf{i}(t)}{۲}, \tag{a۱۳.۵}$$

$$\mathbf{v}_{\text{out}}(t) = \frac{\mathbf{v}(t) - Z.\mathbf{i}(t)}{۲}. \tag{b۱۳.۵}$$

با استفاده از رابطه (۱.۵) و روابط (؟؟)، می‌توانیم رابطه انتگرالی زیر را میان $\mathbf{v}_{\text{in}}(t)$ و $\mathbf{v}_{\text{out}}(t)$ در یک شبکه LTI علی به‌دست آوریم:

(۱۴.۵)

$$\int_{-\infty}^{t} d\tau\, [\mathbf{z}(t-\tau) + Z.\delta(t-\tau)\mathbf{۱}]\, \mathbf{v}_{\text{out}}(\tau) = \int_{-\infty}^{t} d\tau\, [\mathbf{z}(t-\tau) - Z.\delta(t-\tau)\mathbf{۱}]\, \mathbf{v}_{\text{in}}(\tau).$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از رابطه (۱۴.۵)، رابطه زیر را میان ماتریس‌های امپدانس و پراکندگی در حوزه لاپلاس به‌دست می‌آوریم:

$$S(s) = (Z(s) + Z.\mathbf{۱})^{-۱}\,(Z(s) - Z.\mathbf{۱}) = -\,(Z.Y(s) + \mathbf{۱})^{-۱}\,(Z.Y(s) - \mathbf{۱})\,. \tag{۱۵.۵}$$

در اینجا فرض کرده‌ایم که ماتریس‌های

$$Z(s) + Z.\mathbf{۱}$$

و

$$Z.Y(s) + \mathbf{۱}$$

وارون‌پذیر هستند. اما یک نکته جالب این است که S برای یک ساختار الکتریکی همیشه وجود دارد، حتی زمانی که Z یا Y وجود نداشته باشند؛ برای مثال در مورد یک ترانسفورمر. در چنین حالتی، تحلیلی مستقل از رابطه (۱۵.۵) لازم است.

تمرین ۲.۱.۵

بررسی کنید که به‌طور معادل می‌توان نوشت:

$$S(s) = (Z(s) - Z.\mathbf{۱})\,(Z(s) + Z.\mathbf{۱})^{-۱}\,,$$

یعنی ماتریس‌های سمت راست رابطه (۱۵.۵) با هم جابه‌جا می‌شوند. همچنین تساوی آخر در رابطه (۱۵.۵) را بررسی کنید.

پاسخ تمرین ۲.۱.۵

با استفاده از رابطه (۱۵.۵) داریم:

$$(Z(s) + Z.۱)\, S(s)\, (Z(s) + Z.۱) = Z^۲(s) - Z.^۲۱ = (Z(s) + Z.۱)\, (Z(s) - Z.۱)\,,$$

که به بیان مورد نظر منجر می‌شود. به‌طور جایگزین، می‌توان از بیان صوری زیر استفاده کرد:

$$(۱ + E)^{-۱} = \sum_{k=۰}^{\infty} (-E)^k,$$

که نشان می‌دهد وارون

$$(Z(s) + Z.۱)^{-۱}$$

فقط شامل توان‌هایی از $Z(s)$ است و بنابراین با

$$Z(s) - Z.۱$$

جابجا می‌شود.

برای بررسی تساوی آخر، می‌نویسیم:

$$(Z(s) + Z.۱)^{-۱} = (Z(s)\,[۱ + Z.Y(s)])^{-۱} = (Z.Y(s) + ۱)^{-۱}\, Y(s),$$

و سپس $Y(s)$ را در عامل بعدی جذب می‌کنیم.[۳]

۵-۱-۴ ویژگی‌های اضافی شبکه‌های LTI

برخی ویژگی‌های اضافی شبکه‌های الکتریکی را بررسی می‌کنیم. نخستین ویژگی، دوسویگی است. یک شبکه خطی را دوسویه می‌نامیم اگر و تنها اگر ماتریس امپدانس آن، با فرض وجود داشتن، متقارن باشد:

$$Z(s) = Z^T(s). \tag{۱۶.۵}$$

این خاصیت البته در هر حوزه‌ای برقرار است و برای ماتریس ادمیتانس نیز برقرار خواهد بود. از رابطه (۱۵.۵) می‌بینیم که در یک شبکه دوسویه، ماتریس پراکندگی نیز متقارن است؛ یعنی:

$$S(s) = S^T(s).$$

شبکه‌های خطی نادوسویه در فصل ۶ به‌طور گسترده بررسی خواهند شد. شبکه‌های خطی‌ای که شامل ظرفیت‌ها، خودالقایی‌ها، القای متقابل و مقاومت‌ها باشند، دوسویه هستند.

مفهوم مهم دیگر، شبکه خطی بی‌اتلاف است. این مفهوم را می‌توان در حوزه فوریه به‌سادگی بیان کرد؛ به این صورت که وقتی شبکه دوسویه باشد، اگر مقاومت‌ها را از شبکه‌های دوسویه حذف کنیم، شبکه‌های خطی‌ای به‌دست می‌آوریم که هم دوسویه و هم بی‌اتلاف‌اند. یک شبکه خطی دوسویه و بی‌اتلاف است اگر و تنها اگر ماتریس امپدانس

---

[۳] در مقایسه تحلیل اینجا با حالت تک‌پورتی بخش ۴-۴، توجه کنید که در آنجا v_{in} و v_{out} به‌ترتیب با $v^{\rightarrow}$ و $v^{\leftarrow}$ نشان داده شده‌اند؛ روابط (۴-۶۶)(۴-۶۶) را ببینید. همچنین توجه کنید که در رابطه یک تفاوت علامت وجود دارد؛ یعنی $v^{\leftarrow}(x,t) = -Z.i^{\leftarrow}(x,t)$. دلیل آن این است که در استخراج حاضر، جریان موج چپ‌رو نسبت به تعریف جریان در رابطه (۴-۵۷) و رابطه

$$i(t) = i^{\rightarrow}(t) + i^{\leftarrow}(t)$$

با علامت مخالف در نظر گرفته شده است. این قرارداد متفاوت، البته همان روابط (؟؟) را نتیجه می‌دهد.

آن در حوزه فوریه، یعنی $\mathcal{Z}(\omega)$، متقارن و کاملاً موهومی باشد [۷۴]. این موضوع به‌وضوح حالت تک‌پورتی بخش ۵-۱-۲ را تعمیم می‌دهد. همچنین می‌توان نشان داد که ماتریس پراکندگی در حوزه فوریه،

$$\mathcal{S}(\omega) = S(i\omega),$$

برای یک شبکه خطی دوسویه و بی‌اتلاف، ممکن است مختلط باشد اما همیشه یکانی است. می‌توانید این موضوع را با بررسی رابطه

$$\mathcal{S}^{\dagger}(\omega)\mathcal{S}(\omega) = ۱$$

با استفاده از رابطه (۱۵.۵) تأیید کنید.

تمرین ۳.۱.۵

یک خط انتقال با امپدانس بار $Z_{\text{load}}(s)$ خاتمه یافته است، که در آن بار نماینده نوعی شبکه الکتریکی خطی است.

۱. نشان دهید که ضریب بازتاب $\Gamma(s)$ که ولتاژ ورودی را به ولتاژ خروجی روی خط انتقال مرتبط می‌کند، به‌صورت زیر داده می‌شود:

$$\Gamma(s) = \frac{Z_{\text{load}}(s) - Z_{۰}}{Z_{\text{load}}(s) + Z_{۰}}.$$

۲. نشان دهید وقتی $Z_{\text{load}}(s = i\omega)$ نماینده یک شبکه خطی بی‌اتلاف باشد، داریم:

$$|\Gamma(s = i\omega)|^{۲} = ۱.$$

چرا انتظار چنین نتیجه‌ای را دارید؟ همچنین به‌طور کلی‌تر نشان دهید که:

$$|\Gamma(s)|^{۲} \leq ۱.$$

پاسخ تمرین ۳.۱.۵

۱. چون یک تک‌پورت داریم که به آن یک خط انتقال متصل شده است، ماتریس پراکندگی یک‌بعدی است؛ یعنی فقط یک عدد مختلط منفرد است:

$$S(s) = \Gamma(s).$$

در این حالت، رابطه (۱۵.۵) به شکل زیر درمی‌آید:

$$\Gamma(s) = \frac{Z_{\text{load}}(s) - Z_{۰}}{Z_{\text{load}}(s) + Z_{۰}}.$$

۲. وقتی بار بی‌اتلاف باشد، $Z_{\text{load}}(s = i\omega)$ کاملاً موهومی است. بنابراین اندازه بخش‌های حقیقی و موهومی صورت و مخرج برابر می‌شوند و در نتیجه:

$$|\Gamma(i\omega)|^{۲} = ۱.$$

اگر اتلافی وجود نداشته باشد، تمام تابش باید بازتاب شود.

به‌طور کلی‌تر، فرض کنید:

$$Z_{\text{load}}(s) = a(s) + ib(s), \qquad a(s), b(s) \in \mathbb{R}.$$

آنگاه:

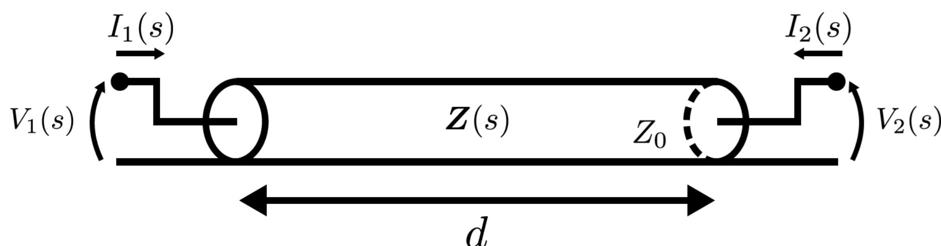
$$|\Gamma(s)|^{۲} = \frac{(a(s) - Z_{۰})^{۲} + b^{۲}(s)}{(a(s) + Z_{۰})^{۲} + b^{۲}(s)} \leq ۱.$$

این رابطه نشان می‌دهد که تابش خروجی می‌تواند به دلیل جذب و اتلاف در بار، شدت کمتری داشته باشد.

در تمرین بعدی، خط انتقال با طول محدود را به‌عنوان یک شبکه خطی دوپورتی در نظر می‌گیریم و ماتریس امپدانس و پراکندگی آن را بررسی می‌کنیم. این موضوع زمانی جالب است که بخواهیم تشدیدگر را به یک خط انتقال دیگر، یا به عناصر غیرخطی دیگر، یا به کیوبیت‌ها متصل کنیم.

تمرین ۴.۱.۵: ماتریس امپدانس یک خط انتقال دوپورتی با طول محدود

در شکل ۵-۳، شماتیکی از یک تشدیدگر خط انتقال دوپورتی با طول d و امپدانس مشخصه $Z_\cdot$ دیده می‌شود؛ یعنی خود خط انتقال را می‌توان با شبکه شکل ۴-۷ نمایش داد.



شکل ۵-۳: شبکه خط انتقال دوپورتی. یک شبکه خطی فرضی که با $Z_{\text{load}}(s)$ نمایش داده می‌شود، می‌تواند مثلاً به انتهای راست متصل شود.

۱. با استفاده از روابط (۴،۶۱) و (۴،۷۸) نشان دهید که ولتاژ و جریان در حوزه فوریه، فقط برای $\omega > ۰$، در امتداد خط به‌صورت زیر داده می‌شوند:

$$V(x, s = i\omega) = v_\cdot^{\rightarrow}(\omega\sqrt{lc}) \left(e^{i\sqrt{lc}\omega x} + \Gamma(i\omega)e^{-i\sqrt{lc}\omega x}\right), \qquad (\text{a}۱۷.۵)$$

$$I(x, s = i\omega) = \frac{v_\cdot^{\rightarrow}(\omega\sqrt{lc})}{Z_\cdot} \left(e^{i\sqrt{lc}\omega x} - \Gamma(i\omega)e^{-i\sqrt{lc}\omega x}\right), \qquad (\text{b}۱۷.۵)$$

که در آن x فاصله از یک بار فرضی در سمت راست خط را نشان می‌دهد؛ این بار در $x = ۰$ قرار دارد. همچنین $\Gamma(s)$ ضریب بازتاب در این بار است و $Z_\cdot$ امپدانس مشخصه خط انتقال است. این فرمول‌ها به‌طور کلی‌تر در حوزه لاپلاس نیز برقرار هستند.

۲. انتظار دارید ماتریس امپدانس $\mathcal{Z}(\omega)$ در حوزه فوریه برای این شبکه چه ویژگی‌هایی داشته باشد؟

۳. ماتریس امپدانس ۲ × ۲، یعنی $Z(s)$، را در حوزه لاپلاس به‌دست آورید. برای این کار از تعریف رابطه (۹.۵) استفاده کنید و از این واقعیت بهره ببرید که جریان صفر در یک پورت را می‌توان با یک بار بی‌نهایت مدل کرد. درایه‌های قطری و غیرقطری این ماتریس را جداگانه تخمین بزنید، با استفاده از روابط (a۱۷.۵) و (b۱۷.۵) و عبارت ضریب بازتاب $\Gamma(s)$ در پاسخ تمرین ۳.۱.۵، که به $Z_{\text{load}}(s)$ وابسته است.

۴. ماتریس پراکندگی $S(s)$ را نیز در حوزه لاپلاس به‌دست آورید. انتظار دارید این ماتریس در حوزه فوریه چه ویژگی‌هایی داشته باشد؟

پاسخ تمرین ۴.۱.۵

۱. با گرفتن تبدیل فوریه از روابط (؟؟) و در نظر گرفتن فقط $\omega > ۰$، چون اطلاعات مربوط به $\omega < ۰$ تکراری است، داریم:

$$V^{\rightarrow}(x, s = i\omega) = v_\cdot^{\rightarrow}(\omega\sqrt{lc})e^{-i\sqrt{lc}\omega x}, \qquad (۱۸.۵)$$

$$V^{\leftarrow}(x, s = i\omega) = v_{\cdot}^{\leftarrow}(\omega\sqrt{lc})e^{i\sqrt{lc}\omega x}. \quad (۱۹.۵)$$

به دلیل وجود بار فرضی در $x = ۰$، باید ولتاژ بازتابی در این نقطه برابر باشد با:

$$V^{\leftarrow}(x = ۰, s) = \Gamma(s)V^{\rightarrow}(x = ۰, s).$$

بنابراین:

$$v_{\cdot}^{\leftarrow}(\omega\sqrt{lc}) = \Gamma(i\omega)v_{\cdot}^{\rightarrow}(\omega\sqrt{lc}),$$

که دامنه‌های ورودی و خروجی را به هم مرتبط می‌کند. چون ولتاژ کل در حوزه فوریه برابر است با:

$$V(x, i\omega) = V^{\rightarrow}(x, i\omega) + V^{\leftarrow}(x, i\omega),$$

و موقعیت

$$x \in [-d, ۰]$$

را در نظر می‌گیریم، رابطه (a۱۷.۵) را به‌دست می‌آوریم؛ در این رابطه اکنون $x > ۰$ به معنی فاصله است.
با استفاده از رابطه بین $v^{\rightarrow}(x, t)$ و $i^{\rightarrow}(x, t)$ در رابطه(۴-۴۶)، که در حوزه فوریه نیز برقرار است، به‌دست می‌آوریم:

$$I(x, i\omega) = I^{\rightarrow}(x, i\omega) + I^{\leftarrow}(x, i\omega) = \frac{۱}{Z_{\cdot}}\left(V^{\rightarrow}(x, i\omega) - V^{\leftarrow}(x, i\omega)\right),$$

که رابطه (b۱۷.۵) از آن نتیجه می‌شود.

۲. انتظار داریم ماتریس امپدانس در حوزه فوریه متقارن و کاملاً موهومی باشد، چون شبکه دوسویه و بی‌اتلاف است.

۳. همان‌طور که در رابطه (۹.۵) تعریف شد، درایه‌های ماتریس امپدانس برای $k, l = ۱, ۲$ به‌صورت زیر داده می‌شوند:

$$Z_{kl}(s) = \left.\frac{V_k(s)}{I_l(s)}\right|_{I_k=۰,\ k\neq l}. \quad (۲۰.۵)$$

داشتن جریان صفر در یک پورت، یعنی مدار باز بودن آن پورت، معادل داشتن امپدانس بار

$$Z_{\text{load}} \rightarrow +\infty$$

است. برای تعیین درایه‌های قطری و غیرقطری ماتریس امپدانس، دو آزمایش فکری انجام می‌دهیم:

- **جملهٔ قطری برای $k = ۱$، در سمت چپ:**

$$Z_{۱۱}(s) = \frac{V(d, s)}{I(d, s)} = \lim_{Z_{\text{load}}\rightarrow+\infty} Z_{\cdot}\frac{Z(s) + Z_{\cdot}\tanh(\sqrt{lc}\,sd)}{Z_{\cdot} + Z_{\text{load}}(s)\tanh(\sqrt{lc}\,sd)} = Z_{\cdot}\coth(\sqrt{lc}\,sd). \quad (۲۱.۵)$$

توجه کنید که به دلیل تقارن:

$$Z_{۲۲}(s) = Z_{۱۱}(s),$$

یعنی می‌توان تصور کرد که بار به سمت چپ، در پورت ۱، متصل شده است.

• **جمله‌های غیرقطری:**
(۲۲.۵)

$$Z_{۲۱}(s) = \frac{V(۰, s)}{I(d, s)} = \lim_{Z_{\text{load}} \to +\infty} Z.\frac{۱ + \Gamma(s)}{e^{\sqrt{lc}\,sd} - \Gamma(s) e^{-\sqrt{lc}\,sd}} = Z.\,\text{csch}(\sqrt{lc}\,sd).$$

دوباره، به دلیل تقارن داریم:

$$Z_{۲۱}(s) = Z_{۱۲}(s),$$

زیرا خط انتقال بی‌اتلاف است.

بنابراین ماتریس امپدانس برابر است با:

$$Z(s) = Z.\begin{pmatrix} \coth(\sqrt{lc}\,sd) & \text{csch}(\sqrt{lc}\,sd) \\ \text{csch}(\sqrt{lc}\,sd) & \coth(\sqrt{lc}\,sd) \end{pmatrix}. \qquad (۲۳.۵)$$

۴. انتظار داریم ماتریس پراکندگی در حوزه فوریه متقارن و یکانی باشد. ماتریس پراکندگی را می‌توان با جایگذاری $Z(s)$ در رابطه (۱۵.۵) به‌دست آورد و نتیجه می‌شود:

$$S(s) = \begin{pmatrix} ۰ & e^{-\sqrt{lc}\,ds} \\ e^{-\sqrt{lc}\,ds} & ۰ \end{pmatrix}. \qquad (۲۴.۵)$$

توجه کنید که این ماتریس به‌درستی متقارن است و در حوزه فوریه، یعنی وقتی $s = i\omega$، همان‌طور که انتظار می‌رود یکانی است.

تمرین ۵.۱.۵: امپدانس یک تشدیدگر $\lambda/۴$

یک تشدیدگر را در نظر بگیرید که یک انتهای آن زمین شده است، همان‌طور که در بخش ؟؟ بحث شد، در حالی که انتهای دیگر آن مانند یک تک‌پورت عمل می‌کند. نشان دهید که این شبکه امپدانسی برابر با رابطه زیر دارد:

$$\mathcal{Z}(\omega) = iZ.\tan\left(\frac{d\omega}{v_p}\right) = iZ.\tan\left(\omega\sqrt{lc}\,d\right). \qquad (۲۵.۵)$$

برای استخراج این رابطه، می‌توانید از روابط (a۱۷.۵) و (b۱۷.۵) برای خطوط انتقال دوپورتی استفاده کنید و شرط مناسب متناظر با پورت زمین‌شده را اعمال کنید.

پاسخ تمرین ۵.۱.۵

پورت زمین‌شده را می‌توان با یک «بار» با

$$Z_{\text{load}}(s) = ۰$$

نمایش داد، یعنی اتصال کوتاه. بنابراین:

$$\Gamma(s) = -۱.$$

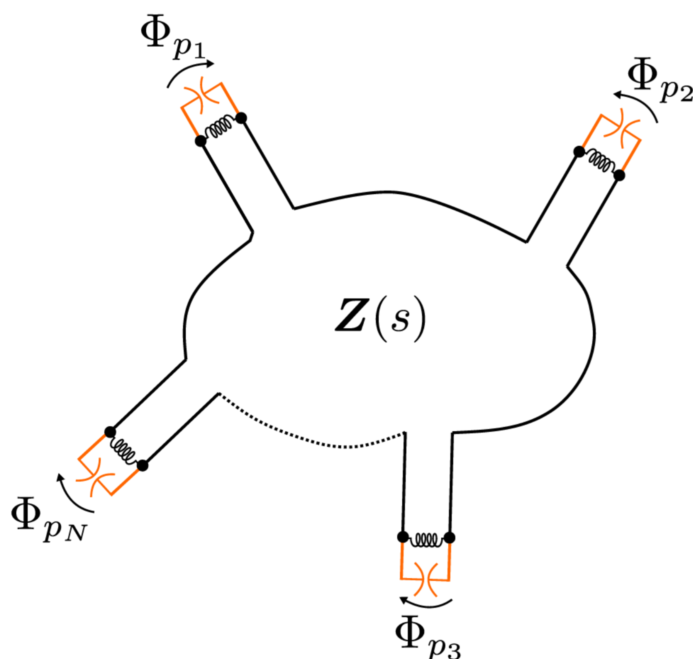
این نتیجه می‌دهد:

$$\mathcal{Z}(\omega) = Z_{۱۱}(s = i\omega) = Z.\frac{e^{i\sqrt{lc}\omega d} - e^{-i\sqrt{lc}\omega d}}{e^{i\sqrt{lc}\omega d} + e^{-i\sqrt{lc}\omega d}},$$

که از آن نتیجه رابطه (۲۵.۵) به‌دست می‌آید.

۲-۵ کوانتیزه‌سازی جعبه‌سیاه

هدف کوانتش جعبه‌سیاه آن است که هامیلتونیِ مداری را به‌دست آوریم که از پیوندهای جوزفسونِ کوپل‌شده به یک شبکه مایکروویوی عمومی تشکیل شده است، و در نتیجه سیستم را کوانتیده کنیم. ایده اصلی این است که تنها عناصر غیرخطی در این شبکه، پیوندهای جوزفسون هستند و می‌توان سیستم را بر حسب درجات آزادیِ سیستم خطی نمایش داد؛ درجات آزادی‌ای که سپس تحت تأثیر پیوندهای جوزفسون قرار می‌گیرند. البته تحلیل سیستم خطی از نظر محاسباتی کارآمد است. در واقع، چنین سیستم خطی‌ای، به‌عنوان یک سیستم محاسباتی کوانتومی، هیچ توانی فراتر از افزاره‌های کلاسیکی ندارد.



شکل ۵-۴: پیوندهای جوزفسونِ کوپل‌شده به یک شبکه مایکروویوی عمومی. $Z(s)$ ماتریس امپدانس در حوزه لاپلاسِ شبکه خطی است، که شامل بخش خطی پیوند جوزفسون، یعنی اندوکتانس جوزفسون، نیز می‌شود.

کوانتش جعبه‌سیاه دستورالعملی برای نوشتن هامیلتونی در پایه مُدهای نرمالِ سیستم خطی ارائه می‌دهد؛ حتی اگر مدل مداریِ دقیق شبکه را ندانیم و فقط به ماتریس امپدانس یا ماتریس پراکندگی آن دسترسی داشته باشیم. این ماتریس‌ها می‌توانند نتیجه شبیه‌سازی‌های الکترومغناطیسی کلاسیکِ بخش خطی شبکه باشند، که می‌توانند به‌شکل کارآمد انجام شوند.

سیستمی از پیوندهای جوزفسون را در نظر می‌گیریم که به یک شبکه مایکروویوی غیرفعال، بی‌اتلاف و دوسویه کوپل شده‌اند. یک مثال، چیدمان معمول برای کیوبیت‌های ترانسمون روی یک تراشه ابررسانا است، که در آن ترانسمون‌ها به تشدیدگرهای باس و خوانش کوپل می‌شوند. می‌توان دو پایانه یک پیوند جوزفسون را به‌عنوان یک پورت از شبکه مایکروویوی خطی تفسیر کرد. رویکرد اصلی کوانتش جعبه‌سیاه در مرجع [۹۷] همه بخش‌های خطی مدار را وارد شبکه خطی می‌کند؛ حتی بخش خطی پتانسیل جوزفسون، یعنی اندوکتانس جوزفسون، را نیز شامل می‌شود. این وضعیت در شکل ۵-۴ برای حالت N پیوند نشان داده شده است؛ در آنجا بخش سیاه سیستم با ماتریس امپدانس $N \times N$، یعنی $Z(s)$، برای شبکه خطی توصیف می‌شود، در حالی که بخش غیرخطی پیوند کنار گذاشته شده است. دقیق‌تر، پتانسیل پیوند جوزفسون n-ام به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$U_{J_n} = -E_{J_n} \cos\left(\frac{۲\pi}{\Phi_۰}\Phi_{p_n}\right) = U_{\text{spider,n}}(\Phi_{p_n}) + \frac{\Phi_{p_n}^۲}{۲L_{J_n}}, \qquad (۲۶.۵)$$

که در آن L_{J_n} اندوکتانس جوزفسون است و Φ_{p_n} شار روی پورت پیوند است؛ یعنی:

$$\Phi_{p_n}(t) = \int_{-\infty}^{t} dt'\, v_{p_n}(t'). \tag{۲۷.۵}$$

پتانسیل $U_{\text{spider,n}}$ بخش غیرخطی پتانسیل جوزفسون است؛ همان بخشی که در شکل ۵-۴ با عنصر عنکبوتیِ نارنجی نشان داده شده است، در حالی که اندوکتورها، که با رنگ سیاه نمایش داده شده‌اند، به تعریف $Z(s)$ افزوده می‌شوند.

ایده کوانتش جعبه‌سیاه با استفاده از رویکرد مُد نرمال چنین است. همان‌طور که در پیوست ۱۰-۳ و شکل ؟؟ به‌تفصیل نشان می‌دهیم، بخش خطی شبکه اساساً یک سیستم از نوسانگرهای کوپل‌شده است که همیشه می‌توان آن را در سطح کلاسیکی با یافتن مُدهای نرمال قطری کرد. بنابراین، اگر M مُد نرمال داشته باشیم، باید بتوان بخش خطی هامیلتونی را به‌صورت زیر نوشت:

$$H_{\text{lin}} = \sum_{m=۱}^{M} \hbar\omega_m \hat{a}_m^{\dagger}\hat{a}_m, \tag{۲۸.۵}$$

که در آن ω_m فرکانس تشدید مُد m است و $\hat{a}_m$ و $\hat{a}_m^{\dagger}$ به‌ترتیب عملگرهای نابودی و خلق آن هستند.

افزون بر این، می‌توان عملگرهای شار پورت $\hat{\Phi}_{p_n}$ را به‌صورت ترکیب خطی شارهای مُد نرمال $\hat{\Phi}_m$ نوشت؛ رابطه (B.۳۶) را ببینید. یعنی:

$$\hat{\Phi}_{p_n} = \sum_{m=۱}^{M} t_{mn}\hat{\Phi}_m = \sum_{m=۱}^{M} t_{mn}\sqrt{\frac{\hbar Z_m}{۲}}\left(\hat{a}_m + \hat{a}_m^{\dagger}\right), \tag{۲۹.۵}$$

که در آن Z_m امپدانس مشخصه مُد m است و به‌صورت زیر داده می‌شود:

$$Z_m = \frac{۱}{C_۰\omega_m} = \sqrt{\frac{L_m}{C_۰}}, \tag{۳۰.۵}$$

که در آن $C_۰$ یک ظرفیت مرجع است، که برای درست بودن بُعدها لازم است، و برای همه مُدها یکسان گرفته می‌شود. این تعریف معادل آن است که اندوکتانس مؤثر مُد m را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$L_m = \frac{۱}{C_۰\omega_m^۲}. \tag{۳۱.۵}$$

برای استفاده‌های بعدی، ضرایب $t_{mn} \in \mathbb{R}$ در رابطه (۲۹.۵) را در بردارهای ستونی حقیقی N-بعدی جمع می‌کنیم:

$$t_m = \begin{pmatrix} t_{m۱} \\ \vdots \\ t_{mN} \end{pmatrix}, \qquad m \in \{۱, \ldots, M\}. \tag{۳۲.۵}$$

به دلایلی که بعداً روشن خواهد شد، این بردارها، بردارهای نسبت دور نامیده می‌شوند.

با وارد کردن پتانسیل غیرخطی، هامیلتونی کل سیستم در پایه مُد نرمال برابر است با:

$$\begin{aligned} H &= H_{\text{lin}} + \sum_{n=۱}^{N} U_{\text{spider,n}}(\Phi_{p_n}) \\ &= \sum_{m=۱}^{M} \hbar\omega_m \hat{a}_m^{\dagger}\hat{a}_m + \sum_{n=۱}^{N} U_{\text{spider,n}}\left(\sum_{m=۱}^{M} t_{mn}\sqrt{\frac{\hbar Z_m}{۲}}\left(\hat{a}_m + \hat{a}_m^{\dagger}\right)\right). \end{aligned} \tag{۳۳.۵}$$

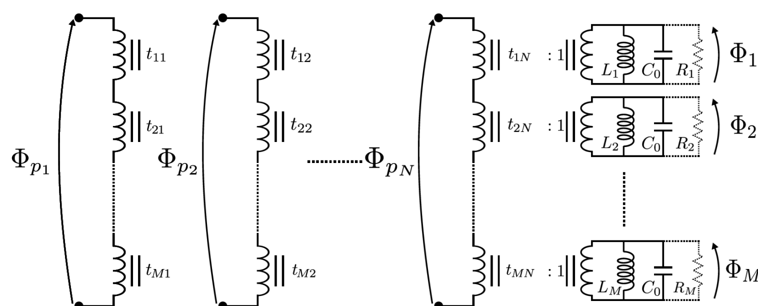
بنابراین، بخش خطی سیستم دقیقاً حل شده است، در حالی که بخش غیرخطی، کوپلینگ و امکان ایجاد درهم‌تنیدگی میان مُدها را فراهم می‌کند. افزون بر این، برای به‌دست‌آوردن هامیلتونی در پایه مُد نرمال، باید کمیت‌های زیر را استخراج کنیم:

- فرکانس‌های مُد نرمال ω_m؛
- بردارهای نسبت دور t_m؛
- امپدانس‌های مشخصه Z_m؛
- انرژی‌های جوزفسون E_{J_n}. این انرژی‌ها را نمی‌توان از شبیه‌سازی‌های الکترومغناطیسی کلاسیکی به‌دست آورد، اما می‌توان هر E_{J_n} را با تخمین جریان بحرانی I_c پیوند n-ام تخمین زد. راه دیگر این است که برای یک ترانسمون منفرد، با توجه به فرایند ساخت پیوند آن، E_J را از طیف آن تخمین بزنیم، برای مثال با استفاده از روابط (۴-۴۱) و (۴-۴۲)، و سپس این مقدار را به پیوندهایی که به‌صورت یکسان ساخته شده‌اند تعمیم دهیم.

این کار باید دست‌کم برای مُدهایی انجام شود که در مسئله ما مرتبط هستند؛ در حالی که مُدهایی که از فرکانس‌های مورد علاقه ما بسیار دورند، می‌توانند به‌عنوان یک تقریب از تحلیل حذف شوند.

هامیلتونی در پایه مُد نرمال در رابطه (۵.۳۳) را می‌توان برای هر مدار ابررسانایی شامل ترانسمون‌ها، کیوبیت‌های شار یا فلاکسونیوم‌ها به‌دست آورد. با این حال، همان‌طور که در بخش ۵-۵ استدلال خواهیم کرد، پایه مُد نرمال هنگام بررسی سیستم‌های شامل کیوبیت‌های ترانسمون، یا به‌طور کلی‌تر کیوبیت‌هایی با غیرخطی‌بودن ضعیف، مناسب‌تر است. دلیل آن این است که مُدهای نرمال، با افزودن غیرخطی‌بودن ضعیف، با تقریب بسیار خوبی همان درجات آزادی متناظر با کیوبیت‌ها هستند. با این حال، رویکرد مُد نرمال برای مطالعه مدارهایی با کیوبیت‌های فلاکسونیوم نیز به‌کار رفته است [۱۰۱].

دو وضعیت معمول وجود دارد که در آن‌ها می‌خواهیم از کوانتش جعبه‌سیاه استفاده کنیم و هامیلتونی را مانند رابطه (۵.۳۳) بنویسیم. در حالت اول، یک نمایش با عناصر فشرده از مدار داریم. در این حالت، اگرچه می‌توانیم از کوانتش استاندارد مدار استفاده کنیم و هامیلتونی را به‌دست آوریم، ممکن است همچنان ترجیح دهیم در پایه مُد نرمال کار کنیم. دلیل آن می‌تواند این باشد که طیف کم‌انرژی مدار را می‌توان با مُدهای ضعیفاً ناهارمونیک توصیف کرد، که پایه مُد نرمال برای آن‌ها مناسب است؛ یا این‌که بخواهیم به‌صورت نظام‌مند با هامیلتونی‌ای از شکل رابطه (۵.۳۳) کار کنیم. در حالت دوم، نمایش با عناصر فشرده نداریم.



شکل ۵-۵: هم‌ارزی مداری یک شبکه خطی N-پورتی، که در فصل ۷ مرجع [۱] توصیف شده است. اندوکتانس‌های متناظر با مُدهای نرمال به‌صورت $L_m = \frac{۱}{C_۰ \omega_m^۲}$ داده می‌شوند. وقتی $N = ۱$ باشد، می‌بینیم که شبکه را می‌توان با مجموعه‌ای سری از M نوسانگر LC با اندوکتانس‌های L_m نمایش داد. وقتی شبکه اتلاف ضعیف داشته باشد، می‌توان آن را با افزودن یک مقاومت R_m به‌صورت موازی با هر نوسانگر LC شماره m تقریب زد؛ همان‌طور که با شاخه‌های نقطه‌چین اضافی نشان داده شده است.

نمایش مداری در اختیار نداریم، بلکه به‌جای آن ماتریس امپدانس آن را در یک بازه فرکانسی مشخص داریم؛ ماتریسی که مثلاً از طریق شبیه‌سازی‌های الکترومغناطیسی به‌دست آمده است.

برای نوشتن هامیلتونی در پایه مُدهای نرمال، از ساختار کائر استفاده می‌کنیم که در شکل ؟؟ نشان داده شده است. از نظر جبری، این قضیه بیان می‌کند که ماتریس امپدانس یک شبکه LTI غیرفعال، بی‌اتلاف و دوسویه را همیشه می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$Z(s) = \sum_{m=۱}^{M} \frac{۱}{۲C_۰} \left(\frac{۱}{s + i\omega_m} + \frac{۱}{s - i\omega_m} \right) R_m, \qquad (۳۴.۵)$$

که در آن $C_۰$ همان ظرفیت مرجعِ ذکرشده در بالا است. وقتی همه فرکانس‌های $\omega_m \geq ۰$ متمایز باشند، ماتریس‌های R_m که R در اینجا مخفف residue است، ماتریس‌هایی متقارن، رتبه‌یک و $N \times N$ هستند که توسط بردارهای نسبت دور t_m تعیین می‌شوند؛ یعنی:

$$R_m = t_m t_m^T, \qquad (R_m)_{kl} = t_{mk} t_{ml}. \qquad (۳۵.۵)$$

توجه می‌کنیم که R_m، علامت کلی بردار $\pm t_m$ را آزاد باقی می‌گذارد، و این M علامت $\pm$، یکی برای هر t_m، از نظر فیزیکی معنادار نیستند.

ساختار کائر را با استفاده از فرمالیسم لاگرانژی در پیوست ۱۰-۳ استخراج می‌کنیم؛ همچنین فصل ۷ مرجع [۱] را ببینید. در آنجا نشان داده می‌شود که به‌دست‌آوردن شکل ماتریس امپدانس در رابطه (۳۴.۵)، عملاً معادل به‌دست‌آوردن مُدهای نرمال مدار است. برای بحث‌های بیشتر درباره این ساختار و شبکه‌های مایکروویوی به‌طور کلی، خواننده را به مراجع [۱، ۱۰۲، ۱۰۳] ارجاع می‌دهیم.

اکنون توضیح می‌دهیم که اگر ماتریس امپدانس در حوزه فرکانس $\mathcal{Z}(\omega)$ در دسترس باشد، چگونه می‌توان پارامترهای لازم برای نوشتن هامیلتونی به فرم مُد نرمال را استخراج کرد. فرکانس‌های تشدید را می‌توان با یافتن قطب‌های $\mathcal{Z}(\omega)$ یا به‌طور معادل، با یافتن صفرهای ماتریس ادمیتانس

$$\mathcal{Y}(\omega) = \mathcal{Z}^{-۱}(\omega)$$

به‌دست آورد.

پس از آن‌که M فرکانس تشدید ω_m را شناختیم، می‌توانیم بردارهای t_m را نیز به دو روش تعیین کنیم. نخست، با استفاده از روابط (۳۴.۵) و (۳۵.۵) داریم:

$$t_{mk} t_{ml} = \lim_{\omega \to \omega_m} ۲C_۰ (i\omega - i\omega_m) \mathcal{Z}_{kl}(\omega), \qquad (۳۶.۵)$$

که به ما اجازه می‌دهد مؤلفه‌های بردارهای نسبت دور را، تا علامت کلی، تعیین کنیم؛ البته به شرطی که بتوانیم این حد را محاسبه کنیم. اگر یک بیان تحلیلی برای $\mathcal{Z}_{kl}(\omega)$ داشته باشیم، می‌توان از این رابطه برای تعیین ضرایب t_{km} استفاده کرد.

به‌صورت جایگزین، برای $\omega \approx \omega_m$ درایه‌های ماتریس امپدانس به‌صورت تقریبی زیر هستند:

$$\mathcal{Z}_{kl}(\omega) \approx \frac{۱}{۲C_۰} \frac{t_{mk} t_{ml}}{i(\omega - \omega_m)}. \qquad (۳۷.۵)$$

حال تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{\mathcal{Y}}_{kl}(\omega) = \frac{۱}{\mathcal{Z}_{kl}(\omega)},$$

که توجه کنید این کمیت، درایه $\mathcal{Y}_{kl}(\omega)$ از ماتریس ادمیتانس نیست. از رابطه (۳۷.۵) به‌دست می‌آوریم:

$$t_{mk} t_{ml} = \frac{۲C_۰}{\mathrm{Im}\left(\frac{d\tilde{\mathcal{Y}}_{kl}}{d\omega}\Big|_{\omega=\omega_m} \right)}. \qquad (۳۸.۵)$$

۵-۲-۱ رویکرد نسبت مشارکت انرژی برای کوانتیزه‌سازی جعبه‌سیاه

در این بخش، روش نسبت مشارکت انرژی برای کوانتش جعبه‌سیاه را بررسی می‌کنیم که در مرجع [۹۸] معرفی شده است. این روش همچنین در بسته پایتونی Qiskit Metal، توسعه‌یافته توسط IBM، پیاده‌سازی شده است. این روش در اصل کاملاً معادل چیزی است که در بخش قبلی نوشتیم. با این حال، نیازی ندارد که بردارهای نسبت دور را از درایه‌های ماتریس ادمیتانس یا امپدانس، مانند روابط (۳۶.۵)، (۳۷.۵) و (۳۸.۵)، استخراج کنیم. در عوض، نشان می‌دهد که چگونه ضرایب

$$\frac{۲\pi}{\Phi_۰} t_{mn} \sqrt{\frac{\hbar Z_m}{۲}}$$

در رابطه (۳۳.۵) را به‌عنوان نسبت مشارکت انرژیِ مُد m در پیوند جوزفسون n-ام، مستقیماً از شبیه‌سازی‌های کلاسیکی الکترومغناطیسی به‌دست آوریم.

برای برجسته‌کردن این نکته که نسبت مشارکت انرژی یک مفهوم کلاسیکی است و بنابراین می‌توان آن را از شبیه‌سازی‌های الکترومغناطیسی استاندارد استخراج کرد، بحث را کاملاً کلاسیکی نگه می‌داریم. هر شار مُد نرمال $\Phi_m(t)$ معادله دیفرانسیل یک نوسانگر هارمونیک با فرکانس ω_m را ارضا می‌کند:

$$\frac{d^۲\Phi_m(t)}{dt^۲} = -\omega_m^۲ \Phi_m(t), \qquad m = ۱, \ldots, M. \tag{۳۹.۵}$$

اکنون وضعیتی را در نظر می‌گیریم که در آن فقط مُد نرمال m در ابتدا «برانگیخته» شده است. از نظر ریاضی، این موضوع به شرایط اولیه زیر تبدیل می‌شود:

$$\Phi_m(۰) = \Phi_{\text{in}}, \qquad \left.\frac{d\Phi_m}{dt}\right|_{t=۰} = \Phi'_{\text{in}}, \tag{a۴۰.۵}$$

و برای $m' \neq m$:

$$\Phi_{m'}(۰) = ۰, \qquad \left.\frac{d\Phi_{m'}}{dt}\right|_{t=۰} = ۰. \tag{b۴۰.۵}$$

این شرایط جواب زیر را نتیجه می‌دهند:

$$\Phi_m(t) = \Phi_{\text{in}} \cos(\omega_m t) + \frac{\Phi'_{\text{in}}}{\omega_m} \sin(\omega_m t), \tag{a۴۱.۵}$$

در حالی که:

$$\Phi_{m'}(t) = ۰, \qquad m' \neq m.$$

اکنون نسبت مشارکت انرژی p_{mn} برای مُد m در پیوند n-ام را به‌صورت نسبت میان انرژی القایی کل ذخیره‌شده در پیوند n-ام، فقط به‌دلیل مُد m، و انرژی القایی کل مُد m، میانگین‌گیری‌شده روی یک دوره

$$\frac{۲\pi}{\omega_m}$$

تعریف می‌کنیم:

$$p_{mn} = \frac{\frac{۱}{۲L_{J_n}} \int_۰^{۲\pi/\omega_m} dt\, \Phi_{p_n}^۲(t)}{\frac{۱}{۲L_m} \int_۰^{۲\pi/\omega_m} dt\, \Phi_m^۲(t)} = \frac{L_m}{L_{J_n}} t_{mn}^۲ = \frac{t_{mn}^۲}{C_۰ \omega_m^۲ L_{J_n}}, \tag{۴۲.۵}$$

که در آن از تعریف اندوکتانس مؤثر مُد m در رابطه (۳۱.۵) استفاده کرده‌ایم. این رابطه به شناسایی زیر منجر می‌شود:

$$t_{mn} = s_{mn} \omega_m \sqrt{C_۰ L_{J_n} p_{mn}}, \tag{۴۳.۵}$$

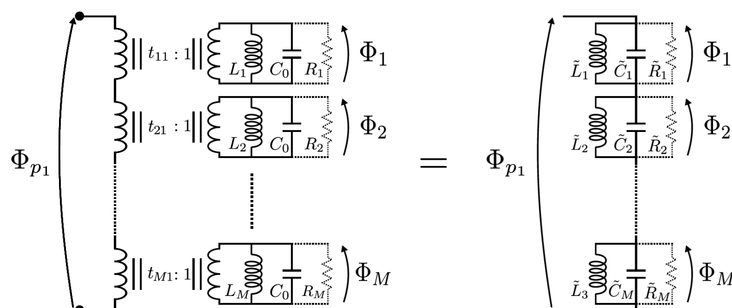
که در آن:

$$s_{mn} = \pm ۱.$$

بنابراین می‌بینیم که نسبت‌های مشارکت انرژی به ما اجازه می‌دهند نسبت‌های دور را به‌دست آوریم؛ البته در s_{mn} دوباره آزادی علامت کلیِ بی‌اهمیت از نظر فیزیکی وجود دارد. مرجع [۹۸] توضیح می‌دهد که چگونه می‌توان علامت‌های s_{mn} را از جواب‌های میدان کلاسیکی محاسبه کرد. برای رویکردی ماژولارتر به کوانتش جعبه‌سیاه بر پایه روش نسبت مشارکت انرژی، خواننده را به مرجع [۱۰۴] ارجاع می‌دهیم.

۵-۲-۲ کوانتیزه‌سازی جعبه‌سیاه تک‌درگاهی

به‌عنوان یک مثال، هامیلتونی کیوبیت ترانسمون، یعنی هامیلتونی مدار شکل ؟؟، را به‌دست می‌آوریم. برای این کار، کیوبیت ترانسمون را به‌صورت یک شبکه تک‌پورتی، یعنی $N = ۱$، در نظر می‌گیریم که از یک نوسانگر LC تشکیل شده و یک پیوند جوزفسون به آن متصل است. اندوکتانس پیوند جوزفسون L_J همراه با خازن شنت در قالب یک نوسانگر LC در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۵-۶: همارزی میان مدار کائر تک‌پورتی و مدار فاستر. پارامترهای این دو مدار به‌صورت زیر به هم مربوطاند: $\tilde{C}_m = \frac{C_۰}{t^۲_{m۱}}$، $\tilde{L}_m = L_m t^۲_{m۱} = \frac{۱}{\tilde{C}_m \omega^۲_m}$. در حالت اتلاف ضعیف، مقاومت‌های شاخه‌های نقطه‌چین R_m و $\tilde{R}_m$ با رابطه $\tilde{R}_m = R_m t^۲_{m۱}$ به هم مربوط می‌شوند.

برای نوسانگر LC با فرکانس بنیادی

$$\omega_J = \frac{۱}{\sqrt{L_J C}},$$

ادمیتانس $\mathcal{Y}(\omega)$ در رابطه (۱۱.۵) داده شده است. بنابراین:

$$\left.\frac{d\mathcal{Y}(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_J} = ۲iC,$$

که نتیجه می‌دهد:

$$t^۲_{۱۱} = \frac{C_۰}{C}.$$

توجه کنید که ظرفیت مرجع نامرتبط $C_۰$ وقتی رابطه (۳۳.۵) را همراه با Z_m در رابطه (۳۰.۵) به‌کار می‌بریم، حذف می‌شود و در نتیجه به هامیلتونی زیر می‌رسیم:

$$H = \hbar\omega_J \hat{a}^\dagger \hat{a} + U_{\mathrm{spider}}\left(\sqrt{\frac{\hbar}{۲C\omega_J}}\left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right)\right), \qquad (۴۴.۵)$$

که همان هامیلتونی ترانسمون است.

به‌طور کلی‌تر، وقتی یک پورتِ پیوند جوزفسون منفرد، یعنی $N = ۱$، به شبکه‌ای با M فرکانس متصل باشد، داریم:

$$t_{m۱} = \sqrt{\frac{۲C_۰}{\mathrm{Im}\left(\frac{d\mathcal{Y}}{d\omega}\Big|_{\omega=\omega_m}\right)}}. \tag{۴۵.۵}$$

می‌توانیم یک ظرفیت مؤثر مُد $\tilde{C}_m$ معرفی کنیم، به‌گونه‌ای که هامیلتونی به‌صورت زیر نوشته شود:

$$H = \sum_m \hbar\omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + U_{\text{spider}}\left(\sum_{m=۱}^{M} \sqrt{\frac{\hbar}{۲\omega_m \tilde{C}_m}}\left(\hat{a}_m^\dagger + \hat{a}_m\right)\right), \tag{۴۶.۵}$$

که در آن ظرفیت مؤثر مُد به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{C}_m = \frac{۱}{۲}\mathrm{Im}\left(\frac{d\mathcal{Y}}{d\omega}\Big|_{\omega=\omega_m}\right). \tag{۴۷.۵}$$

بنابراین، به‌جای استفاده از ظرفیت مرجع $C_۰$، می‌توان وابستگی به نسبت‌های دورِ بدون‌بُعد را نیز با استفاده از فرکانس‌های ω_m و ظرفیت‌های مؤثر $\tilde{C}_m$ بازنویسی کرد. با این حال، نسبت‌های دور به‌طور طبیعی در بیان ساختار کائر به‌کار می‌روند؛ پیوست ۱۰-۳ را ببینید. شکل ؟؟ هم‌ارزی میان این دو رویکرد را در حالت تک‌پورتی نشان می‌دهد. توجه می‌کنیم که هرچه شیب $\mathcal{Y}(\omega_m)$ تندتر باشد، اثر جمله غیرخطی عنکبوتی روی مُد m ضعیف‌تر است و در نتیجه آن مُد کمتر ناهارمونیک می‌شود. با رسم $\mathrm{Im}(\mathcal{Y})$ به‌عنوان تابعی از ω، می‌توان دید که کدام مُدها بیشترین سهم از غیرخطی‌بودن پیوند جوزفسون را به ارث می‌برند.

۵-۳ شبکه‌های اتلاف‌دار

وقتی شبکه اتلافی باشد، درایه‌های ماتریس امپدانس آن $\mathcal{Z}(\omega)$ دیگر کاملاً موهومی نیستند. اتلاف را می‌توان در توصیف عناصر فشرده شبکه، با افزودن مقاومت‌ها وارد کرد. توجه کنید که مقاومت‌ها لزوماً همه منابع اتلاف یا نویز را در افزاره‌های ابررسانا مدل نمی‌کنند؛ زیرا نویز می‌تواند وابسته به فرکانس باشد، مانند نویز شار $۱/f$، که در فصل ۷ بررسی می‌شود. یک نمونه از اتلاف که می‌توان آن را با مقاومت مدل کرد، اتلاف دی‌الکتریک درون یک خازن است، مانند خازن پیوند جوزفسون. برای مدل‌کردن این حالت، می‌توان یک مقاومت R را به‌صورت موازی با خازن قرار داد. در این حالت، مقاومت بزرگ R، طبیعتاً به معنی اتلاف کم است.

وقتی میدان الکتریکی مربوط به هر یک از مُدهای مرتبط با محاسبات، در بخشی از دی‌الکتریک روی تراشه، مانند یک اکسید یا زیرلایه سیلیکونی، حضور داشته باشد، اتلاف دی‌الکتریک رخ می‌دهد. مقدار اتلاف در یک مُد، با این تعیین می‌شود که چه کسری از انرژی میدان الکتریکیِ مربوط به آن مُد در ماده دی‌الکتریک خاص ذخیره شده است؛ کمیتی که آن را نسبت مشارکت r_i برای ماده i-ام می‌نامیم. همچنین ویژگی‌های اتلاف خود ماده نیز اهمیت دارد. کمیت دوم توسط ثابت دی‌الکتریک ϵ ماده تعیین می‌شود؛ این ثابت برای مواد بی‌اتلاف حقیقی است، اما برای ماده اتلافی دارای مؤلفه موهومی نیز هست [۱۰۵]. تانژانت اتلاف یک ماده به‌صورت زیر داده می‌شود:

$$\tan(\delta) = \frac{\mathrm{Im}(\epsilon)}{\mathrm{Re}(\epsilon)} = \frac{۱}{Q}, \tag{۴۸.۵}$$

که در آن Q، ضریب کیفیت ذاتی ماده ناشی از اتلاف دی‌الکتریک است. روشن است که در حالت نبود اتلاف، یعنی وقتی

$$\mathrm{Im}(\epsilon) = ۰,$$

مقدار Q واگرا می‌شود. اگر چند ماده در اتلاف دی‌الکتریک سهم داشته باشند، داریم:

$$\tan(\delta_{\text{tot}}) = \sum_i r_i \tan(\delta_i) = \frac{۱}{Q_{\text{tot}}}. \tag{۴۹.۵}$$

برای اطلاعات بیشتر، برای مثال به مراجع [۱۰۶–۱۰۸] مراجعه کنید.

یک مدل ساده برای شبکه اتلافی، که وقتی شبکه خیلی پراتلاف نباشد دقیق است، یک شبکه کائر اتلافی است. در این مدل، یک مقاومت به‌صورت موازی با هر نوسانگر LC در شکل ؟؟ قرار داده می‌شود. این مدل یک شبکه خطی، غیرفعال و اتلافی کاملاً عمومی را نمایش نمی‌دهد؛ همان‌طور که در مراجع [۱۰۹، ۱۱۰] نشان داده شده است. این کارها یک تحلیل شبکه‌ای کاملاً دقیق را تجویز می‌کنند که بر پایه کار برونه است، همان‌طور که برای مثال در مرجع [۱۱۱] توضیح داده شده است. برخلاف رابطه (۳۴.۵)، برای یک شبکه اتلافی، قطب‌های $Z(s)$، یا صفرهای $Y(s)$، معمولاً در مقادیر مختلط

$$s = i\omega + \sigma$$

رخ می‌دهند. در ادامه، فقط شبکه کائر اتلافیِ ساده و تک‌پورتی را با جزئیات بررسی می‌کنیم، اما تعمیم آن به شبکه‌های چندپورتی مستقیم است.

۵-۳-۱ حالت تک‌درگاهی

مدار RLC

ابتدا مثال ساده یک نوسانگر LC منفرد را در نظر می‌گیریم که به‌صورت موازی با یک مقاومت R قرار گرفته است؛ یعنی نوسانگر RLC. در حالت عناصر اتلافی، مناسب‌تر است با ادمیتانس‌ها و امپدانس‌ها در حوزه لاپلاس کار کنیم.

فرکانس تشدید نوسانگر LC بدون اتلاف برابر است با:

$$\omega_r = \frac{۱}{\sqrt{LC}},$$

و نرخ واپاشی نوسانگر را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\kappa = \frac{۱}{RC}. \quad (۵۰.۵)$$

از آنجا که ادمیتانس‌ها در اتصال موازی با هم جمع می‌شوند، داریم:

$$Y(s) = sC + \frac{۱}{sL} + \frac{۱}{R} = \frac{C}{s}\left(s^{۲} + s\kappa + \omega_r^{۲}\right). \quad (۵۱.۵)$$

بنابراین، شرط

$$Y(s) = ۰$$

نتیجه می‌دهد:

$$s = s_{\pm} = -\frac{\kappa}{۲} \pm i\omega_r\sqrt{۱ - \frac{\kappa^{۲}}{۴\omega_r^{۲}}}. \quad (۵۲.۵)$$

فرکانس تشدیدِ جابه‌جاشده برابر است با:

$$\tilde{\omega}_r = \omega_r\sqrt{۱ - \frac{\kappa^{۲}}{۴\omega_r^{۲}}},$$

که اندکی از فرکانس نوسانگر LC «بدون اتلاف» فاصله دارد. علاوه بر این، نرخ واپاشی κ که در رابطه (۵۰.۵) تعریف شده است، می‌تواند به‌صورت زیر شناسایی شود:

$$\kappa = -۲\mathrm{Re}(s_{\pm}).$$

این نرخ واپاشی، بر حسب فرکانس زاویه‌ای، ضریب کیفیت مُد را تعیین می‌کند:

$$Q = \frac{\omega_r}{\kappa},$$

یعنی تعداد نوسان‌ها پیش از میرایی.

بنابراین، اگر این موضوع را به تعریف تانژانت اتلاف کل مُد در رابطه (۴۹.۵) وصل کنیم، برای سازگاری باید مقاومت R را به‌صورت زیر انتخاب کنیم:

$$R = \frac{۱}{C\omega_r \tan(\delta_{\rm tot})}. \tag{۵۳.۵}$$

همچنین آموزنده است که امپدانس مدار RLC موازی را در حوزه لاپلاس بر حسب بسط کسرهای جزئی بازنویسی کنیم و آن را با فرم کلی بی‌اتلاف در رابطه (۳۴.۵) مقایسه کنیم. به‌دست می‌آوریم:

$$Z(s) = \frac{۱}{Y(s)} = \frac{۱}{C}\left(\frac{s_+}{s_+ - s_-}\frac{۱}{s - s_+} - \frac{s_-}{s_+ - s_-}\frac{۱}{s - s_-}\right). \tag{۵۴.۵}$$

وقتی نسبت κ/ω_r کوچک باشد، می‌توان قطب‌های $s_\pm$ در رابطه (۵۲.۵) را تا مرتبه اول بسط تیلور داد و نوشت:

$$s_\pm = -\frac{\kappa}{۲} \pm i\omega_r + O\left(\frac{\kappa^۲}{\omega_r^۲}\right). \tag{۵۵.۵}$$

پس در این حد، می‌توان امپدانس را به‌صورت زیر تقریب زد:

$$Z(s) \approx \frac{۱}{۲C\omega}\left[\frac{\omega + i\kappa/۲}{s - i(\omega + i\kappa/۲)} + \frac{\omega - i\kappa/۲}{s + i(\omega - i\kappa/۲)}\right]. \tag{۵۶.۵}$$

اکنون نزدیک قطب‌ها، یعنی برای

$$s \approx \pm i\omega_r,$$

می‌توان سهم‌های $i\kappa/۲$ در صورت رابطه (۵۶.۵) را نیز نادیده گرفت و به‌دست آورد:

$$Z(s) \approx \frac{۱}{۲C}\left[\frac{۱}{s - i(\omega_r + i\kappa/۲)} + \frac{۱}{s + i(\omega_r - i\kappa/۲)}\right]. \tag{۵۷.۵}$$

در اصل، رابطه (۵۷.۵) فقط نزدیک قطب‌ها معتبر است. با این حال، دور از قطب‌ها امپدانس به هر حال تقریباً صفر است؛ بنابراین رابطه (۵۷.۵) از این نظر، وقتی اتلاف کوچک باشد، یعنی

$$\kappa/\omega_r \ll ۱,$$

تقریب خوبی است. رابطه (۵۷.۵) تقریب فاستر اتلافیِ امپدانس یک نوسانگر RLC منفرد نامیده می‌شود. ساختار مداری شکل ؟؟ این ایده را به حالت اتلافی چندمدی و چندپورتی تعمیم می‌دهد.

تمرین ۱.۳.۵

ادمیتانس یک نوسانگر LC را بدهید که در آن یک مقاومت R به‌صورت سری با خازن قرار گرفته است. سپس κ را تعیین کنید و نشان دهید که با استفاده از تعریف ضریب کیفیت

$$Q = \frac{\omega_r}{\kappa}$$

و رابطه (۴۹.۵)، وقتی مقاومت R کوچک باشد، می‌توان نوشت:

$$R \approx \frac{\tan(\delta_{\rm tot})}{C\omega_r}. \tag{۵۸.۵}$$

پاسخ تمرین ۱.۳.۵

داریم:

$$Y(s) = \frac{۱}{sL} + \frac{۱}{R + \frac{۱}{sC}}. \qquad (۵۹.۵)$$

برای این مدار، شرط $Y(s) = ۰$ در نقاط زیر رخ می‌دهد:

$$s_{\pm} = -\frac{R}{۲L} \pm \frac{i}{\sqrt{LC}}\sqrt{۱ - \frac{CR^۲}{۴L}}.$$

بنابراین:

$$\kappa = \frac{R}{L} = \frac{\omega_r}{Q}.$$

پس:

$$R = \tan(\delta_{\text{tot}})L\omega_r \approx \frac{\tan(\delta_{\text{tot}})}{C\omega_r},$$

که در آن از این واقعیت استفاده شده است که فرکانس تشدید جدید برابر است با:

$$\text{Im}(s_+) = \frac{۱}{\sqrt{LC}}\sqrt{۱ - \frac{CR^۲}{۴L}} \approx \omega_r$$

وقتی R کوچک باشد.

شبکه اتلافی تک‌پورتی ($N = ۱$) با $M > ۱$

می‌توان نشان داد که بیان رابطه (۵۷.۵) به یک شبکه عمومی تک‌پورتی یا چندپورتی نیز تعمیم پیدا می‌کند؛ یعنی قطب‌های $Z(s)$ در رابطه (۳۴.۵) یک بخش حقیقی $\kappa/۲$ به‌دست می‌آورند؛ رابطه (.۴۴B) در پیوست ۱۰-۳ را ببینید. در اینجا حالت تک‌پورتی $N = ۱$ را بررسی می‌کنیم.

مدار شکل ؟؟، سمت راست، را در نظر بگیرید و فرض کنید ω_m فرکانس نوسانگر RLC شماره m و κ_m نرخ واپاشی آن باشد. برای چنین شبکه‌ای، فرض کنید $\{s_m\}$ مجموعه M صفر مختلط ادمیتانس باشد؛ یعنی:

$$\forall s_m, \qquad Y(s_m) = ۰. \qquad (۶۰.۵)$$

چون شبکه، مجموعه‌ای سری از نوسانگرهای RLC است، می‌دانیم:

$$Y(s) = \frac{۱}{\sum_{m=۱}^{M} \frac{۱}{Y_m(s)}} = Y_n(s)\frac{۱}{۱ + \sum_{m\neq n} \frac{Y_n(s)}{Y_m(s)}}, \qquad (۶۱.۵)$$

که در آن $Y_m(s)$ ادمیتانس نوسانگر RLC شماره m، مانند رابطه (۵۱.۵)، است. بنابراین اگر

$$s = s_n$$

به‌گونه‌ای باشد که

$$Y_n(s_n) = ۰,$$

آنگاه

$$Y(s_n) = ۰.$$

برعکس نیز برقرار است: $Y(s) = ۰$ فقط وقتی رخ می‌دهد که برای یک n،

$$Y_n(s) = ۰.$$

پس:

$$\omega_m = \mathrm{Im}(s_m), \qquad \kappa_m = -۲\mathrm{Re}(s_m). \tag{۶۲.۵}$$

اگر تک‌پورت را به عناصر مداری دیگری مانند پیوند جوزفسون وصل کنیم، به ظرفیت مؤثر مُد $\tilde{C}_m$ در رابطه (۴۷.۵) نیز نیاز داریم. از رابطه (۶۱.۵) می‌بینیم که:

$$\left.\frac{dY}{ds}\right|_{s=s_m} = \left.\frac{dY_m}{ds}\right|_{s=s_m} \approx \left.\frac{dY_m}{ds}\right|_{s=i/\sqrt{\tilde{L}_m\tilde{C}_m}} = ۲\tilde{C}_m, \tag{۶۳.۵}$$

همان‌طور که انتظار می‌رود.

همان‌طور که پیش‌تر اشاره کردیم، $Y(s)$ می‌تواند از شبیه‌سازی‌های عددی الکترومغناطیسی به‌دست آمده باشد و هدف این است که داده‌ها را با مجموعه‌ای از نوسانگرهای RLC برازش کنیم. با این حال، ممکن است فقط داده‌ها برای $s = iz$ کاملاً موهومی، یعنی فقط $\mathcal{Y}(z)$، در دسترس باشند؛ در حالی که κ_m به بخش حقیقی صفر مختلط s_m مرتبط است. در این حالت، به‌عنوان یک تقریب کم‌اتلاف، می‌توان ریشه‌های حقیقی z_m را که برای آن‌ها

$$\mathrm{Im}(\mathcal{Y}(z_m)) = ۰$$

است، تعیین کرد و

$$\omega_m = z_m$$

گرفت. نرخ واپاشی مُدی با فرکانس ω_m، به قیاس با یک نوسانگر RLC منفرد، برابر است با:

$$\kappa_m = \frac{۱}{\tilde{R}_m\tilde{C}_m},$$

که در آن:

$$\tilde{C}_m = \frac{۱}{۲}\mathrm{Im}(\mathcal{Y}'(\omega_m)), \qquad \tilde{R}_m = \frac{۱}{\mathrm{Re}(\mathcal{Y}(z_m))}.$$

این روابط به بیان زیر منجر می‌شوند:

$$\kappa_m \approx \frac{۲\mathrm{Re}(\mathcal{Y}(\omega_m))}{\mathrm{Im}(\mathcal{Y}'(\omega_m))} \geq ۰. \tag{۶۴.۵}$$

در بخش ۹-۱ بحث می‌کنیم که چگونه از نرخ‌های واپاشی κ_m و هامیلتونی H در رابطه (۴۶.۵) برای مدل‌کردن دینامیک شبکه با استفاده از معادله مستر لیندبلاد استفاده کنیم؛ رابطه (۱.۷) را ببینید.

۴-۵ استفاده از بسته‌ی نرم‌افزاری QuCAT

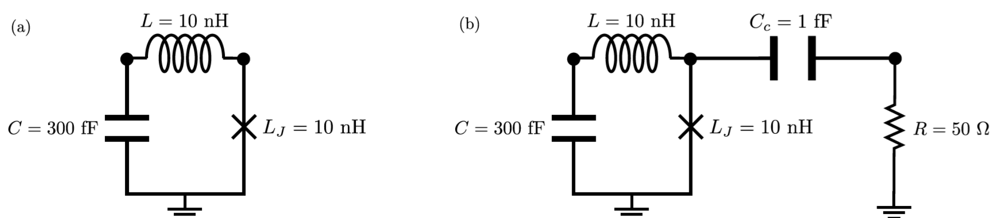
در این بخش، از طریق دو تمرین با بسته نرم‌افزاری QuCAT آشنا می‌شوید. QuCAT مخفف Quantum Circuit Analyzer Tool است و یک کتابخانه متن‌باز پایتون است که ابزارهای تحلیل استاندارد برای مدارهای ابررسانا، ساخته‌شده پیرامون پیوندهای جوزفسون، فراهم می‌کند. این بسته توسط Mario Gely در زمان فعالیت او در دانشگاه صنعتی دلفت، در آزمایشگاه Steele Lab، توسعه داده شده است. QuCAT دارای یک رابط گرافیکی یا برنامه‌نویسی شهودی برای ساخت مدارها است، توانایی محاسبه هامیلتونی آن‌ها را دارد، و همچنین مجموعه‌ای از قابلیت‌های مکمل مانند محاسبه نرخ‌های اتلاف یا تصویرسازی جریان در مدار را فراهم می‌کند. اطلاعات بیشتر درباره آنچه می‌توان با QuCAT انجام داد، در نشانی زیر و همچنین در مرجع [۹۹] آمده است:

https://qucat.org

تمرین اول درباره فهم این موضوع است که چگونه می‌توان یک کیوبیت ترانسمون را با مداری متفاوت نمایش داد. تمرین ۵-۴ تحلیل بیشتری از این ترانسمون و کوپل‌شدن آن به یک مقاومت اتلافی ارائه می‌دهد.

تمرین ۵.۴.۱: کوانتش جعبه‌سیاه یک مدار ترانسمون اصلاح‌شده I

۱. مدار شکل ؟؟(a) را در نظر بگیرید. به‌طور موقت، پیوند این مدار را با یک القاگر جایگزین کنید که اندوکتانس آن برابر با اندوکتانس جوزفسون L_J باشد. ادمیتانس $\mathcal{Y}(\omega)$ را در گره‌های القاگر این شبکه بنویسید.



شکل ۵-۷: مدار ترانسمون اصلاح‌شده در بخش (a)، همراه با کوپلینگ به یک فیدلاین که به‌عنوان منبع اتلاف عمل می‌کند و در بخش (b) با یک مقاومت مدل شده است.

۲. فرکانس تشدید ω_m این مدار را تعیین کنید؛ فرکانسی که در آن

$$\mathcal{Y}(\omega_m) = ۰.$$

راهنمایی: این کار ساده‌تر است اگر ابتدا $\mathcal{Y}$ را به‌صورت یک تابع گویا بر حسب ω بنویسید.

۳. ثابت کنید که ظرفیت مؤثر مدار برابر است با:

$$C_m = \frac{\mathrm{Im}(\mathcal{Y}'(\omega = \omega_m))}{۲} = C\frac{(L + L_J)^۲}{L_J^۲}, \qquad (۵.۶۵)$$

رابطه (۵.۴۷) را ببینید.

راهنمایی: می‌توانید محاسبات را با به‌یادداشتن این نکته ساده کنید که ω_m صورتِ $\mathcal{Y}$ را، وقتی به فرم گویا نوشته شده باشد، صفر می‌کند.

۴. با استفاده از فرکانس تشدید و ظرفیت مؤثر، هامیلتونی مدار را مانند رابطه (۵.۴۴)، همراه با سهم عنکبوتی آن، بنویسید. تنها عملگرهایی که باید در هامیلتونی ظاهر شوند، عملگرهای نابودی و خلق هستند.

۵. هامیلتونی‌ای را بنویسید که از بسط پتانسیل کسینوسی تا مرتبه چهارم و سپس صرف‌نظر کردن از تمام جمله‌های غیرقطری در پایه فاک به‌دست می‌آید. بخش ناهارمونیک هامیلتونی را بر حسب ناهارمونیکی زیر بیان کنید:

$$\tilde{\delta} = -\frac{e^۲}{۲C}\frac{L_J^۳}{(L + L_J)^۳}. \qquad (۵.۶۶)$$

ناهارمونیکی این مدار چه تفاوتی با ناهارمونیکی ترانسمون معمولی، یعنی بدون القاگر، دارد که در بخش ۴-۲ استخراج شد؟

پاسخ تمرین ۵.۴.۱

۱. خازن و القاگر به‌صورت سری به هم متصل شده‌اند؛ بنابراین امپدانس‌های آن‌ها با هم جمع می‌شوند. این ترکیب سری، به‌صورت موازی با پیوند قرار دارد؛ پیوندی که به‌طور موقت آن را با یک القاگر L_J جایگزین کرده‌ایم. بنابراین ادمیتانس‌ها با هم جمع می‌شوند. در نتیجه، ادمیتانس کل در گره‌های پیوند برابر است با:

$$\mathcal{Y}(\omega) = \frac{۱}{iL_J\omega} + \frac{۱}{iL\omega + \frac{۱}{iC\omega}}. \qquad (۵.۶۷)$$

۲. می‌خواهیم $\mathcal{Y}$ را به‌صورت یک تابع گویا بر حسب ω بنویسیم. بنابراین آن را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\mathcal{Y}(\omega) = \frac{۱ - (L + L_J)C\omega^۲}{iL_J\omega(۱ - LC\omega^۲)}. \quad (۶۸.۵)$$

می‌بینیم که صورت، و در نتیجه ادمیتانس، زمانی صفر می‌شود که:

$$\omega = \omega_m = \frac{۱}{\sqrt{(L + L_J)C}}. \quad (۶۹.۵)$$

تمرین ۲.۴.۵: کوانتش جعبه‌سیاه یک مدار ترانسمون اصلاح‌شده II

۱. با استفاده از QuCAT، مدار شکل ؟؟(a) را یا به‌صورت گرافیکی یا به‌صورت برنامه‌نویسی، با استفاده از پارامترهای عددی مشخص‌شده مدار، بسازید. محاسبات تحلیلی خود را برای فرکانس‌های تشدید و ناهارمونیکی‌ها با استفاده از توابع eigenfrequencies و anharmonicities بررسی کنید.

نکته ۱: QuCAT همه کمیت‌ها را در واحد فرکانس، نه فرکانس زاویه‌ای، می‌دهد. یعنی تابع eigenfrequencies مقدار $\omega_m/۲\pi$ را می‌دهد، در حالی که تابع anharmonicities مقدار $\delta/۲\pi$ را می‌دهد. توجه کنید که QuCAT برای ناهارمونیکی مد با فرکانس زاویه‌ای ω_m از حرف A_m به‌جای نماد δ استفاده می‌کند.

نکته ۲: گزارش‌هایی وجود داشته است که رابط گرافیکی QuCAT در نسخه‌های جدید MacOS درست کار نمی‌کند. این تمرین همچنان می‌تواند با یک رویکرد کاملاً برنامه‌نویسی انجام شود.

۲. در عمل، ما فقط به سه تراز اول چنین کیوبیتی علاقه‌مندیم. عبارت تحلیلی و عددی فرکانس‌های گذار میان این ترازها را با استفاده از هامیلتونی قطری‌ای که به‌صورت تحلیلی به‌دست آوردید، ارائه دهید. فرکانس گذار، اختلاف انرژی ویژه دو تراز تقسیم بر ثابت پلانک است.

۳. با استفاده از تابع hamiltonian در QuCAT، این فرکانس‌های گذار را در حالتی محاسبه کنید که در آن جمله‌های غیرقطری را حذف نکرده باشیم. این حالت متناظر با هامیلتونی‌ای است که تابع hamiltonian با بسط تیلور مرتبه ۴، یعنی order=4، برمی‌گرداند. برای این محاسبات، ده برانگیختگی در نظر بگیرید، یعنی excitations = 10. در این تمرین، نیازی نیست مشخص کنید از کدام مدها استفاده شود. سپس فرکانس‌های گذار را با حالتی محاسبه کنید که در آن کسینوس تا مرتبه ۶ بسط تیلور داده شده است، یعنی order=6. با نوشتن تعداد کافی رقم اعشار، مقدارهای متفاوتی را که به‌دست آورده‌اید با محاسبه تحلیلی و اختلالی پرسش قبلی مقایسه کنید تا بتوانید تفاوت میان آن‌ها را ببینید. این کار باید به شما اجازه دهد اعتبار تقریب‌هایی را که در برخورد ما با جمله کسینوسی انجام شده است، مشاهده کنید.

نکته: QuCAT هامیلتونی را در واحدهایی برمی‌گرداند که در آن‌ها $h = ۱$ است؛ بنابراین انرژی‌های ویژه‌ای که بعداً با QuTiP محاسبه می‌شوند، در واحد هرتز خواهند بود.

۴. اکنون حالتی را در نظر بگیرید که این مدار به‌صورت خازنی به یک فیدلاین اتلافی ۵۰Ω متصل شده باشد؛ این فیدلاین با یک مقاومت در مدار شکل ؟؟(b) نمایش داده شده است. بدون انجام هیچ محاسبه‌ای، به‌طور کوتاه توضیح دهید چگونه می‌توان به‌صورت تحلیلی نرخ اتلاف حاصل را محاسبه کرد.

۵. مدار شکل ۵-۷(b) را در QuCAT بسازید و یک مقدار عددی برای نرخ اتلاف ارائه دهید.

پاسخ تمرین ۲.۴.۵

۱. کد زیر استفاده شده است:

```
import qucat as qc
import numpy as np
from scipy.constants import h, e

C = 300e-15
L = 10e-9
Lj = 10e-9

# Analytical results first
print("analytical␣results")
print("w_m␣=␣%.2e␣Hz" % (1 / np.sqrt((L + Lj)
* C) / 2 / np.pi))
print("A␣=␣%.2e␣Hz" % (e**2 / 2 / C * Lj**3 /
(L + Lj)**3 / h))

# Now simulating the problem in QuCAT
cir = qc.Network([
qc.C(0, 1, C),
qc.L(1, 2, L),
qc.J(2, 0, Lj)
])

print("QuCAT␣results")
print("w_m␣=␣%.2e␣Hz" %
(cir.eigenfrequencies()[0]))
print("A␣=␣%.2e␣Hz" %
(cir.anharmonicities()[0]))
```

این کد نتیجه‌های زیر را می‌دهد:

```
analytical results
w_m = 2.05e+09 Hz
A = 8.07e+06 Hz
QuCAT results
w_m = 2.05e+09 Hz
A = 8.07e+06 Hz
[Finished in 5.3s]
```

۲. به سه تراز اول سیستم، یعنی

$$|۰\rangle, \quad |۱\rangle, \quad |۲\rangle$$

علاقه داریم. انرژی‌های ویژه برای این سه حالت، مقدارهای چشمداشتی هامیلتونی برای همین سه حالت هستند؛ یعنی:

$$۰, \qquad \hbar\omega_m - A, \qquad ۲\hbar\omega_m - ۳A.$$

بنابراین فرکانس‌های گذار، در واحد فرکانس، برابرند با:

$$\frac{\omega_m}{۲\pi} - \frac{A}{h}, \qquad \frac{\omega_m}{۲\pi} - \frac{۲A}{h}.$$

مقدارهای عددی عبارت‌اند از:

$$۲٫۰۴۶۶۱ \times ۱۰^{۹}\ \mathrm{Hz}, \qquad ۲٫۰۳۸۵۴ \times ۱۰^{۹}\ \mathrm{Hz}.$$

۳. کد زیر به پرسش‌ها پاسخ می‌دهد:

```
import qucat as qc
import numpy as np
from scipy.constants import h, e

C = 300e-15
L = 10e-9
Lj = 10e-9

fm = 1 / np.sqrt((L + Lj) * C) / 2 / np.pi
A = e**2 / 2 / C * Lj**3 / (L + Lj)**3 / h

# Analytical results first
print("analytical␣results")
print("%.5e␣Hz,␣%.5e␣Hz" % (fm - A, fm - 2 *
A))

# Now simulating the problem in QuCAT
cir = qc.Network([
qc.C(0, 1, C),
qc.L(1, 2, L),
qc.J(2, 0, Lj)
])

H = cir.hamiltonian(taylor=4, excitations=10)
ee = H.eigenenergies()
print("4th␣order␣diagonalization")
print("%.5e␣Hz,␣%.5e␣Hz" % (ee[1] - ee[0],
ee[2] - ee[1]))

H = cir.hamiltonian(taylor=6, excitations=10)
ee = np.real(H.eigenenergies())
print("6th␣order␣diagonalization")
print("%.5e␣Hz,␣%.5e␣Hz" % (ee[1] - ee[0],
ee[2] - ee[1]))
```

نتیجه زیر به‌دست می‌آید:

```
analytical results
2.04661e+09 Hz, 2.03854e+09 Hz
4th order diagonalization
2.04655e+09 Hz, 2.03834e+09 Hz
6th order diagonalization
2.04661e+09 Hz, 2.03853e+09 Hz
[Finished in 9.9s]
```

۴. ابتدا به‌طور موقت پیوند مدار را با یک القاگر جایگزین می‌کنیم که اندوکتانس آن برابر با L_J است. سپس ادمیتانس $\mathcal{Y}(\omega)$ را در گره‌های همین القاگر L_J می‌نویسیم. بعد عدد مختلط ζ_m را تعیین می‌کنیم که شرط زیر را ارضا کند:

$$\mathcal{Y}(\zeta_m) = ۰.$$

نرخ اتلاف از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\kappa_m = ۲\,\mathrm{Im}[\zeta_m].$$

۵. کد زیر استفاده شده است:

```
import qucat as qc

C = 300e-15
L = 10e-9
Lj = 10e-9
Cc = 1e-15
R = 50

cir = qc.Network([
qc.L(1, 2, L),
qc.J(0, 2, Lj),
qc.C(1, 0, C),
qc.C(2, 3, Cc),
qc.R(3, 0, R)
])

print("Loss␣rate␣=␣%.2e␣Hz" %
(cir.loss_rates()[0]))
```

این کد نتیجه می‌دهد:

```
Loss rate = 1.11e+03 Hz
[Finished in 4.3s]
```

۵-۵ شبکه‌های کیوبیت‌های ترنسمون در رژیم پاشندگی

در بخش ۵-۲ دیدیم که هامیلتونی هر شبکه مایکروویوی شامل N پیوند جوزفسون را می‌توان در پایه مُدهای نرمال، مانند رابطه (۵.۳۳)، نوشت. اکنون مداری از جعبه‌های جفت کوپر، یا CPBها، را در نظر می‌گیریم که به‌صورت خازنی به یک شبکه خطی کوپل شده‌اند.[۴] همچنین فرض می‌کنیم که همه درجات آزادی مدار، ترانسمون‌مانند هستند. بنابراین، یک تقریب خوب آن است که کسینوس پتانسیل جوزفسون را تا مرتبه چهارم بسط دهیم؛ مشابه رویکردی که در بخش ۴-۲ داشتیم. برای یک ترانسمون منفرد و ایزوله می‌دانیم که این بسط زمانی موجه است که:

$$E_J/E_C \gg ۱.$$

[۴] در اینجا حالتی را که در آن یک شنت القایی وجود دارد کنار می‌گذاریم؛ زیرا در غیر این صورت دیگر یک CPB ساده نداریم، بلکه با یک کیوبیت شار یا فلاکسونیوم روبه‌رو خواهیم بود.

با این حال، در حالت ما، که در آن ترانسمون‌ها به شبکه‌های عمومی متصل‌اند، فوراً روشن نیست که برای هر پورت باید کدام مقیاس انرژی خازنی را در نظر بگیریم. این ظرفیت باید مستقل از نمایش خاص مدار با عناصر فشرده باشد؛ بنابراین نمی‌تواند صرفاً همان ظرفیتی باشد که مستقیماً پیوند جوزفسون را شنت می‌کند.

در واقع، ظرفیت شنتی که باید به پورت n نسبت دهیم، همان ظرفیت کل معادل تونن است که این پورت می‌بیند. این ظرفیت به‌صورت ظرفیت معادلی تعریف می‌شود که پورت در حالتی می‌بیند که همه القاگرها حذف شوند؛ یعنی با مدار باز جایگزین شوند. برای فهم این‌که چگونه ظرفیت‌های تونن را به‌دست آوریم، می‌توانیم مدار عمومی کائر در شکل ؟؟ را بدون القاگرها در نظر بگیریم. با فرض این‌که بار روی هر پورت نیز کاملاً القایی باشد، باید فرض کنیم همه پورت‌ها، به‌جز پورتی که مورد نظر ماست، مدار باز هستند. در این حالت، پورت n به‌طور مؤثر M ظرفیت را به‌صورت سری می‌بیند که ظرفیت هرکدام برابر است با $t_{mn}^{۲}C_{۰}$، برای $m = ۱, \ldots, M$. بنابراین ظرفیت تونن دیده‌شده توسط پورت n-ام، از ترکیب سری همه این ظرفیت‌ها به‌دست می‌آید:

$$C_{Tn} = \left(\sum_{m=۱}^{M} \frac{۱}{t_{mn}^{۲} C_{۰}} \right)^{-۱}, \qquad n = ۱, \ldots, N. \tag{۷۸.۵}$$

انرژی شارژ معادل تونن آنگاه برابر است با:

$$E_{C_n} = \frac{e^{۲}}{۲C_{Tn}}. \tag{۷۹.۵}$$

همه درجات آزادی در رژیم ترانسمون قرار دارند اگر:

$$E_{J_n}/E_{C_n} \gg ۱.$$

با بسط تیلور رابطه (۳۳.۵) تا مرتبه چهارم، به‌دست می‌آوریم:

$$H \approx \sum_{m=۱}^{M} \hbar\omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m - \sum_{n=۱}^{N} \frac{E_{J_n}}{۲۴} \left(\frac{۲\pi}{\Phi_{۰}} \right)^{۴} \left[\sum_{m=۱}^{M} t_{mn} \sqrt{\frac{\hbar Z_m}{۲}} \left(\hat{a}_m + \hat{a}_m^\dagger \right) \right]^{۴}. \tag{۸۰.۵}$$

اکنون، در قیاس نزدیک با کاری که در بخش ۴-۲ و تمرین ۵-۴ انجام شد، می‌توانیم تمام سهم‌هایی را که در جمله غیرخطی، تعداد برانگیختگی‌ها را در هر مُد m حفظ نمی‌کنند، نادیده بگیریم. با فرض این‌که مُدها هم‌فرکانس نباشند، این کار را می‌توان نمونه‌ای از نظریه اختلال مرتبه اول دانست. برای مثال، جمله‌های متناسب با

$$\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_{m'}^\dagger \hat{a}_{m'}^\dagger \hat{a}_{m'}$$

را نادیده می‌گیریم. توجه کنید که این کار فقط زمانی مجاز است که فرض کنیم مُدهای m و m' به‌اندازه کافی از نظر فرکانسی دور از هم هستند.[۵] بنابراین فقط جمله‌های تشدیدی، یعنی جمله‌های پایستار انرژی مانند

$$\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \hat{a}_{m'}^\dagger \hat{a}_{m'}$$

را نگه می‌داریم. تنها دو نوع جمله باقی می‌مانند:

$$\left(\hat{a}_m + \hat{a}_m^\dagger \right)^{۴} \overset{\text{RWA}}{\approx} ۱۲\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + ۶\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \hat{a}_m, \tag{a۸۱.۵}$$

و

$$\left(\hat{a}_m + \hat{a}_m^\dagger \right)^{۲} \left(\hat{a}_{m'} + \hat{a}_{m'}^\dagger \right)^{۲} \overset{\text{RWA}}{\approx} ۲\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + ۲\hat{a}_{m'}^\dagger \hat{a}_{m'} + ۴\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \hat{a}_{m'}^\dagger \hat{a}_{m'}. \tag{b۸۱.۵}$$

[۵] یک حذف کمتر سخت‌گیرانه‌تر جمله‌ها می‌تواند این باشد که فقط جمله‌هایی نگه داشته شوند که تعداد کل برانگیختگی‌ها را در همه مُدها، یا در زیرمجموعه‌ای از مُدها، حفظ می‌کنند. برای مثال، نگه داشتن جمله‌ای مانند $\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_l \hat{a}_n$ مناسب‌تر است وقتی برخی فرکانس‌ها نزدیک به هم یا همخوان باشند.

در سمت راست این روابط، جمله‌های ثابت را نادیده گرفته‌ایم و از رابطه کموتاسیون بوزونی

$$[\hat{a}_m, \hat{a}^\dagger_{m'}] = \delta_{mm'} ١$$

برای بازآرایی برخی جمله‌ها استفاده کرده‌ایم. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{H}{\hbar} \approx \sum_{m=١}^{M} \Omega_m \hat{a}^\dagger_m \hat{a}_m + \frac{\delta_m}{٢} \hat{a}^\dagger_m \hat{a}^\dagger_m \hat{a}_m \hat{a}_m + \sum_{\text{pairs all}, m \neq m'} \chi_{mm'} \hat{a}^\dagger_m \hat{a}_m \hat{a}^\dagger_{m'} \hat{a}_{m'}. \quad (٨٢.۵)$$

در اینجا فرکانس‌های مؤثر مُدها را به‌صورت زیر تعریف کرده‌ایم:

$$\Omega_m = \omega_m + \delta_m + \frac{١}{٢} \sum_{m'=١, m' \neq m}^{M} \chi_{mm'}, \quad (٨٣.۵)$$

ناهماهنگی‌ها برابرند با:

$$\delta_m = -\left(\frac{٢\pi}{\Phi_٠}\right)^۴ \sum_{n=١}^{N} \frac{\hbar E_{J_n}}{٨} t^۴_{mn} Z^٢_m, \quad (٨۴.۵)$$

و ضریب کراس-کر برابر است با:

$$\chi_{mm'} = -\left(\frac{٢\pi}{\Phi_٠}\right)^۴ \hbar \sum_{n=١}^{N} \frac{E_{J_n}}{۴} t^٢_{mn} t^٢_{m'n} Z_m Z_{m'}. \quad (٨۵.۵)$$

ارائه چند نکته درباره هامیلتونی رابطه (٨٢.۵) مفید است. نخست، در نگاه اول ممکن است روشن نباشد که کدام مُدها باید به‌عنوان ترانسمون و کدام مُدها به‌عنوان تشدیدگر در نظر گرفته شوند، به‌ویژه وقتی شبکه کوپل‌شده اولیه شامل تشدیدگرها باشد؛ زیرا همه مُدها در این تصویر به‌صورت یکسان رفتار می‌شوند. در این تصویر، همه مُدها به دلیل کوپلینگ متقابل، مقداری ناهماهنگی به ارث می‌برند. اما معمولاً می‌توان مُدهای ترانسمون‌مانند را به‌عنوان مُدهایی شناسایی کرد که بیشترین ناهماهنگی را دارند؛ زیرا بردار نسبت دور متناظر با آن‌ها، t_m، مؤلفه بزرگی روی یکی از پورت‌ها دارد. سایر مُدها، که ناهماهنگی بسیار ضعیف‌تری دارند، می‌توانند به‌عنوان مُدهای تشدیدگرمانند در نظر گرفته شوند.

یک رویکرد جایگزین رایج برای توصیف سیستم‌های ترانسمون–تشدیدگر کوپل‌شده این است که مُدهای «محلی» ترانسمون یا تشدیدگر را با عملگرهای نابودی و خلق $\hat{b}_m, \hat{b}^\dagger_m$ معرفی کنیم و سپس کوپلینگ‌های خازنی آن‌ها را اضافه کنیم. در این حالت، مُدهای محلی با جمله‌ای خطی مانند

$$g(\hat{b}_m - \hat{b}_n)(\hat{b}^\dagger_m - \hat{b}^\dagger_n)$$

کوپل می‌شوند، که g قدرت کوپلینگ است؛ مانند رابطه (۴-١٢٩). چنین جمله‌هایی در رابطه (٨٢.۵) ظاهر نمی‌شوند، زیرا با به‌دست‌آوردن مُدهای نرمال و عملگرهای نابودی و خلق $\hat{a}_m, \hat{a}^\dagger_m$ آن‌ها را مستقیماً قطری کرده‌ایم. جالب است که وقتی مُدهای نرمال به‌اندازه کافی از نظر فرکانسی جدا باشند و بتوانیم از رابطه (٨٢.۵) برای توصیف دینامیک مدار استفاده کنیم، با یک هامیلتونی قطری سروکار داریم که استفاده از آن بسیار آسان است.

همچنین، اگر یک مُد ترانسمون‌مانند و یک مُد تشدیدگرمانند را با عملگرهای نابودی $\hat{a}_t$ و $\hat{a}_r$ در نظر بگیریم، جمله کراس-کر

$$\chi_{tr} \hat{a}^\dagger_t \hat{a}_t \hat{a}^\dagger_r \hat{a}_r$$

را می‌توان به‌عنوان برهم‌کنش پاشنده فهمید که برای اندازه‌گیری حالت مُد ترانسمون استفاده می‌شود. با تصویر کردن این برهم‌کنش کراس-کر روی دو تراز اول ترانسمون، جمله‌ای به‌صورت

$$\frac{\chi_{tr}}{٢} \sigma_z \hat{a}^\dagger_r \hat{a}_r$$

به‌دست می‌آوریم. این جمله را می‌توان به‌عنوان جابه‌جایی وابسته به حالت ترانسمون با مقدار

$$\chi = \chi_{tr}/۲$$

برای فرکانس تشدیدگر تفسیر کرد؛ مشابه رابطه (۴-۱۶۸).[۶] با پروب کردن تشدیدگر خوانش، می‌توانیم حالت مُد نرمال ترانسمون را مانند تمرین ۴-۷ تشخیص دهیم.

اگر، در عوض، بخواهیم از مُدهای «موضع‌یافته در مدار» استفاده کنیم تا حالتی را بررسی کنیم که در آن هر مُد از نظر فرکانسی از دیگری بسیار دور است، آنگاه رویکرد استاندارد استفاده از تبدیل شریفر–ولف، یا Schrieffer-Wolff (SW)، است که در بخش ۴-۷ بررسی شد. آن تحلیل نیز دوباره به یک هامیلتونی پاشنده قطری منجر می‌شود [۷۷] و تبدیل SW، مُدها را غیرموضعی یا به بیان دیگر، «لباس‌پوشیده» می‌کند. بنابراین می‌بینیم که رویکرد مُد نرمال و رویکرد مُد محلی همراه با تبدیل SW به عبارت‌های مشابهی منجر می‌شوند. با این حال، رویکرد مُد نرمال، همان‌طور که دیدیم، به‌شکل کارآمدی به مدارهایی با درجات آزادی زیاد تعمیم می‌یابد، در حالی که استفاده از تبدیل‌های SW برای تعداد زیادی زیرسیستم معمولاً نسبتاً دشوار و سنگین است.

به‌عنوان نکته پایانی، برهم‌کنش کراس-کر میان دو مُد ترانسمون‌مانند ۱ و ۲ را در نظر بگیرید؛ یعنی:

$$\chi_{۱۲}\hat{a}_۱^\dagger\hat{a}_۱\hat{a}_۲^\dagger\hat{a}_۲.$$

اگر هر دو مُد را روی زیرفضای کیوبیتی‌شان تصویر کنیم و جایگزینی‌هایی مانند

$$\hat{a}_۱^\dagger\hat{a}_۱ \to \frac{۱}{۲}(\mathbb{I} + Z_۱)$$

و مشابه آن را انجام دهیم، جمله زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{۱}{۴}\chi_{۱۲}Z_۱Z_۲.$$

این همان جمله‌ای است که مسئول کراس‌تاک موسوم به

کراس‌تاک ZZ است؛ برای نمونه، مرجع [۲۰] را ببینید. بنابراین، اثر کراس‌تاک به‌طور طبیعی در رویکرد مُد نرمال توضیح داده می‌شود. گیت‌های دوکیوبیتی میان کیوبیت‌های ترانسمونی، مانند گیت CZ، از طریق تنظیم شار خارجی [۱۱۲] و با استفاده از گذار اجتنابی

$$|۱۱\rangle \leftrightarrow |۰۲\rangle$$

را نیز، در اصل، می‌توان با استفاده از رویکرد مُد نرمال تحلیل کرد [۱۱۳]. در این تصویر، توان درهم‌تنیدگی و نسبت روشن/خاموش گیت CZ باید از طریق تقویت برهم‌کنش کراس-کرِ درهم‌تنیدگی روی مُدهای نرمال به‌دست آید؛ برهم‌کنشی که مقدار آن نیز به شار خارجی وابسته است.

[۶] به ضریب ۲ میان تعریف ضرایب کراس-کر در روابط (۵.۸۲) و (۵.۸۵) و جابه‌جایی پاشنده در رابطه(۴-۱۶۸) توجه داشته باشید.

فصل ۶

ناهم‌متقابلی

مجموعه عناصر مداری‌ای که در این یادداشت‌ها استفاده کرده‌ایم، از یک جهت مهم ناقص است. همه عناصر مداری خطی‌ای که تاکنون دیده‌ایم دوسویه بوده‌اند. ما دوسویگی را به‌صورت رسمی در رابطه (۱۶.۵) تعریف کرده‌ایم و در این فصل آن را با جزئیات شهودی بیشتری بررسی خواهیم کرد. در فیزیک نور، دوسویگی با این جمله بیان می‌شود: «ما چشم‌هایی را می‌بینیم که ما را می‌بینند»؛ خلاصه عمومی مرجع [۱۱۴] را ببینید. این جمله معنای متناظری برای امپدانس مدارهای چندپایانه‌ای دارد. اما در فیزیک موج، درستی این ضرب‌المثل به محیطی بستگی دارد که پرتوها از آن عبور می‌کنند. برای برخی محیط‌ها، برای مثال محیط‌هایی که اثر فاراده را نشان می‌دهند، ما چشم‌هایی را که ما را می‌بینند نمی‌بینیم؛ در این حالت سیستم نادوسویه است.

دوسویگی معمولاً مفهومی قابل اعمال به سیستم‌های غیرخطی در نظر گرفته نمی‌شود. یک بررسی استاندارد و بسیار خوب از این موضوع را می‌توان در مرجع [۱۱۵]، فصل ۴.۱۶، به‌ویژه صفحات ۶۹۴ تا ۶۹۶ یافت. روش نیوکمب [۱]، تعریف ۲-۷، صفحه ۲۹، از این جهت منحصربه‌فرد است که یک بررسی عمومی‌تر ارائه می‌دهد؛ در آن تعریف دوسویگی را می‌توان به سیستم‌های غیرخطی نیز اعمال کرد. با استفاده از تعریف او، تقریباً هر سیستم غیرخطی، یا شبکه‌هایی که شامل منابع هستند، نادوسویه‌اند. به‌طور خاص، یک پیوند جوزفسون منفرد نادوسویه است. نمی‌توان این احتمال را کاملاً رد کرد که یک سیستم غیرخطی به‌شکلی هوشمندانه ساخته شود تا یک سیستم خطی را تقلید کند و سپس دوسویگی نشان دهد. ویدئوکنفرانس در اینترنت قطعاً نمونه‌ای از یک سیستم انتقال بسیار غیرخطی است. می‌توانید ببینید که این سیستم یک سیستم دوسویه را تقلید نمی‌کند، زیرا جمله بالا در آن نادرست است: وقتی به چشم شخصی روی صفحه نگاه می‌کنید، در حال برقراری تماس چشمی نیستید.

اگر توجه خود را، همان‌طور که در روش کوانتش جعبه‌سیاه در فصل ۵ انجام می‌دهیم، به مدارهای الکتریکی خطی محدود کنیم، خواهیم دید که تاکنون واقعاً چیزی را از دست داده‌ایم. اما برای بیان ریاضی‌تر این‌که منظور ما از دوسویگی یا نادوسویگی یک مدار الکتریکی خطی چیست، ابتدا باید کمی از مسیر اصلی خارج شویم و چند مشاهده دیگر درباره شبکه‌های الکتریکی چندپایانه‌ای معرفی کنیم.

۶-۱ درگاه‌ها، پایانه‌ها، و یک افزاره‌ی مهم چندپایانه‌ای

ما پیش‌تر شبکه‌های چندپورتی را در بخش ۵-۱ بررسی کرده‌ایم. یک پورت، یک جفت گره انتخاب‌شده است که به دنیای بیرون متصل می‌شود. گاهی دو پورت مختلف می‌توانند یک گره مشترک داشته باشند، که اغلب همان گره زمین است. معمولاً همه گره‌های شبکه در پورت‌ها شرکت نمی‌کنند. زیرمجموعه‌ای از گره‌ها که می‌توانند در پورت‌ها شرکت کنند، پایانه‌ها نامیده می‌شوند؛ یا در برخی منابع، قطب‌ها نام دارند.[۱]

پایانه‌ها گره‌هایی هستند که برای ارتباط با بقیه دنیای بیرون مناسب تشخیص داده می‌شوند. یک گره از دو راه می‌تواند چنین جایگاهی پیدا کند:

۱. به یک منبع متصل شود، چه به‌صورت یک منبع جریان یا ولتاژ فشرده استاندارد، و چه به‌صورت یک کابل خط انتقال.

[۱] در برخی زبان‌ها، به یک پورت، دو-قطب گفته می‌شود؛ برای مثال در هلندی tweepool.

۲. از آنجا که در اینجا روی بخش‌های خطی شبکه‌ها تمرکز می‌کنیم، می‌توانیم گره‌ای را که یک پیوند جوزفسون به آن متصل است نیز یک پایانه در نظر بگیریم؛ همان‌طور که در بخش ۵-۲ انجام دادیم.

ویژگی دیگر یک جفت پایانه که یک پورت را تشکیل می‌دهد این است که جریان لحظه‌ای واردشونده به یکی از این پایانه‌ها از دنیای بیرون، برابر با جریان خارج‌شونده از پایانه دیگر است. همچنین پاسخ شبکه نباید به اختلاف ولتاژ، یا اختلاف شار، میان دو پایانه‌ای وابسته باشد که در یک پورت یکسان نیستند. اگر چنین وابستگی‌ای وجود داشته باشد، آن جفت باید یک پورت جدید تعریف کند. بیشتر این قیود در مثال‌های واقعی، مانند مثال‌هایی که به‌زودی بررسی خواهیم کرد، بدیهی هستند.

اگر در شبکه خطی خود N گره را به‌عنوان پایانه انتخاب کرده باشیم، می‌توانیم یک ماتریس پاسخ $N \times N$ را به روش زیر تشکیل دهیم. یک گره زمین جداگانه را در نظر بگیرید که جزو شبکه نیست. یک منبع ولتاژ را که با

$$V_l(s = i\omega)$$

توصیف می‌شود، میان پایانه l و گره زمین متصل کنید، به‌گونه‌ای که هر گره عملاً یک پورت را مانند شکل ۵-۱ نمایش دهد. از بخش ۵-۱-۱ به یاد داریم که آرگومان s نشان می‌دهد که در حوزه لاپلاس هستیم، و با قرار دادن

$$s = i\omega$$

خود را به حوزه فوریه محدود می‌کنیم. از هر یک از پایانه‌های دیگر یک سیم اتصال کوتاه به زمین وصل کنید. جریان‌های

$$I_k(s = i\omega)$$

را در حوزه فوریه در هر یک از سیم‌ها اندازه بگیرید. جریان خاص I_k همان تبدیل فوریه جریان عبوری از سیم متصل به پایانه k است. برای پایانه $k = l$، این جریان تبدیل فوریه جریان عبوری از منبع ولتاژ است. به دلیل خطی‌بودن سیستم، با گرفتن نسبت زیر، یک عدد خوش‌تعریف، مختلط و وابسته به ω، به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{I_k(i\omega)}{V_l(i\omega)} = Y_{kl}(i\omega). \tag{۶.۱}$$

بنابراین $Y_{kl}(i\omega)$ درایه‌های ماتریس ادمیتانس هستند، مانند بخش ۵-۱. برای پورت‌ها معمولاً می‌گوییم ماتریس امپدانس وارون ادمیتانس است؛ رابطه (۵.۸) را ببینید. اما در واقع این ماتریس ادمیتانس پایانه‌ای هرگز وارون ندارد. آیا می‌بینید چرا؟

با استفاده از ماتریس ادمیتانس پایانه‌ای، می‌توانیم شرط دوسویگی مدار را مستقیماً، به‌طور کلی در حوزه لاپلاس، بیان کنیم:

$$\text{دوسویگی مدار} \iff Y_{ij}(s) = Y_{ji}(s). \tag{۶.۲}$$

به بیان دیگر، در یک شبکه دوسویه، Y در همه فرکانس‌ها یک ماتریس مختلطِ متقارن است. می‌توان تأیید کرد [۱۱۵] که هر شبکه‌ای که از شاخه‌های مقاومتی، القایی و خازنی، همراه با القای متقابل و ترانسفورمرها ساخته شده باشد، دوسویه است. توجه کنید که اتلاف‌داشتن کاملاً با دوسویگی سازگار است.

۶-۲ سیرکولاتور و ژیراتور

۶-۲-۱ ناهم‌متقابلی در عمل

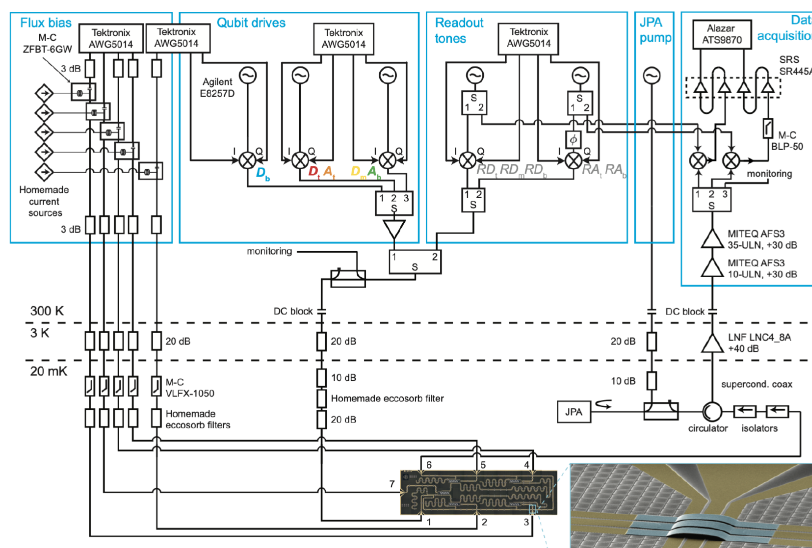
تقریباً هر آزمایش کیوبیت حالت‌جامد در یک آزمایشگاه فناوری کوانتومی شامل چندین نمونه از یک قطعه مایکروویوی به نام سیرکولاتور است؛ شکل ؟؟ را ببینید. چنین سیرکولاتورهایی روی هر خط خوانش استفاده می‌شوند، و هر خط خوانش خود برای خوانش چندین کیوبیت ترانسمون به‌صورت مالتی‌پلکس‌شده به‌کار می‌رود. برای تراشه‌های چندکیوبیتی، تعداد این قطعات می‌تواند به ده‌ها یا حتی تعداد بیشتری سیرکولاتور برسد؛ شکل ؟؟ را ببینید.

هر یک از سیرکولاتورهای به‌کاررفته در این مدارها، اساساً یک جعبه مستطیلی با اندازه لبه معمولی در حد چند سانتی‌متر است. اگرچه این قطعه در مقایسه با القاگرها و خازن‌ها بسیار بزرگ است، با این حال در یک بازه فرکانسی مشخص، تقریباً مانند یک افزاره بی‌اتلاف سه‌پورتی، یا شش‌پایانه‌ای، عمل می‌کند. اصل فیزیکی این سیرکولاتورها بر پایه انتشار تابش مایکروویوی در یک موجبر استوانه‌ای شامل ماده مغناطیده، یعنی فریت، است. معادلات میدان که اثر نادوسویه را نشان می‌دهند، به‌طور کامل در مرجع [۷۴] بررسی شده‌اند.

چندین رویکرد دیگر نیز برای پیاده‌سازی فیزیکی سیرکولاتور مطرح شده است. انگیزه روشن این تلاش‌ها آن است که سیرکولاتورهای امروزی به‌طرز نامناسبی بزرگ هستند. برای یک کامپیوتر کوانتومی با یک میلیون کیوبیت، می‌توان تخمین زد که سیرکولاتورها در سردترین بخش کریوستات حجمی نزدیک به یک متر مکعب اشغال خواهند کرد؛ ویژگی معماری بسیار پرهزینه‌ای.

یک طرح جایگزین برای سیرکولاتور، در نگاه اول، بسیار جذاب است. این طرح شامل یک مدار ساده، یعنی حلقه‌ای از سه پیوند جوزفسون، با شار خارجی ناصفر عبوری از حلقه است [۱۱۶،۱۱۷]. سه گره، سه پورت افزاره را تعریف می‌کنند و پایانه دیگر هر پورت در هر مورد زمین است. اگرچه اکنون آزمایش‌هایی روی این مفهوم انجام شده است، هنوز روشن نیست که آیا این طرح می‌تواند الزامات لازم برای یک سیرکولاتور بودن را برآورده کند یا نه. این افزاره قطعاً غیرخطی خواهد بود، اما هنوز تحلیل یا اندازه‌گیری قانع‌کننده‌ای وجود ندارد که نشان دهد می‌تواند افزاره خطی مطلوب را با موفقیت تقلید کند. محاسبات اولیه نشان می‌دهند که هنگام مدیریت یک فوتون منفرد، آن را به شیوه‌ای مشابه سیرکولاتور هدایت خواهد کرد. اما این موضوع هنوز با نشان‌دادن کارکرد کامل فاصله زیادی دارد.

رویکردهای پیشنهادی دیگری نیز با استفاده از پیوندهای جوزفسون وجود دارند که کامل‌تر توسعه داده شده‌اند، اما هنوز نشان داده نشده‌اند. آن‌ها افزاره‌هایی با تحریک پارامتری هستند و ارتباط نزدیکی با تقویت‌کننده‌ها دارند؛ تقویت‌کننده‌ها در این یادداشت‌ها فقط در تمرین‌های فصل ۸ بررسی می‌شوند. این افزاره‌ها به‌گونه‌ای طراحی شده‌اند که به‌صراحت رفتار خطی و نادوسویه نشان دهند.



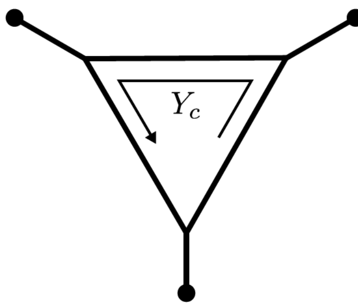
(آ) [۱۱۸]، که در کنار بسیاری از اجزای الکترونیکی دیگر، یک سیرکولاتور و ایزولاتورها را نشان می‌دهد. سیرکولاتوری که یکی از پورت‌های آن با یک مقاومت خاتمه داده شده باشد، ایزولاتور نامیده می‌شود؛ این عنصر تضمین می‌کند که نویز/تابش ورودی به خط خوانش مربوط به سیگنال‌های خروجی، به سمت این مقاومت هدایت شود و در نتیجه اتلاف پیدا کند.



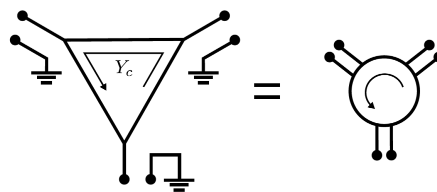
(ب) کریوستات IBM که یک تراشه ۵۰-کیوبیتی، یعنی سیستم $50Q$، مربوط به سال ۲۰۱۷ را در خود جای داده است و در پایین سمت چپ و راست، پشته‌هایی از سیرکولاتورها/ایزولاتورها دیده می‌شود. تصویر از وبلاگ IBM Quantum Blog با عنوان The Future is Quantum، نوامبر ۲۰۱۷، گرفته شده است.

شکل ۶-۱: مواردی که در آن‌ها به عناصر نادوسویه نیاز است.

این رفتار یک ویژگی نامطلوب دارد: آن‌ها فقط در یک باند باریک از فرکانس‌ها سیرکوله می‌کنند؛ در حالی که در سیرکولاتور کتاب‌درسی‌ای که در بخش بعدی بحث خواهد شد، افزاره باید در حالت ایده‌آل روی پهنای‌باند بی‌نهایت



شکل ۶-۲: نماد عنصر سه‌پایانه‌ای با پاسخ Y_c.



شکل ۶-۳: تعریف سیرکولاتور با تبدیل هر پایانه در Y_c به یک پورت.

کار کند.

در نهایت، چند ایده برای رسیدن به افزاره‌های واقعی‌ای وجود دارد که حقیقتاً غیرفعال هستند. شاید جذاب‌ترین، اما کمتر تحلیل‌شده‌ترین آن‌ها، نوعی مفهوم ترانسفورمری با پاسخ ماده‌ای بسیار نادوسویه باشد [۱۱۹]، که توسط تلگن، مخترع ژیراتور، معرفی شد؛ پایین‌تر را ببینید. این شاید تنها مفهوم افزاره‌ای باشد که در اصل شانسی برای نزدیک شدن به حد ایده‌آلِ پهنای‌باند بی‌نهایت دارد، با همان مسائلی که برای خود ترانسفورمر وجود دارد. ایده استفاده از مواد ویژه همچنین در مفهوم استفاده از کوپلینگ خازنی به یک ماده هال کوانتومی، یا هال کوانتومی نامتعارف، برای دستیابی به یک ژیراتور غیرفعال با پهنای‌باند زیاد مطرح می‌شود؛ هرچند با امپدانس مشخصه بسیار بزرگ Z. برای مرور این رویکرد، مرجع [۱۲۰] را ببینید.

۶-۲-۲ فرمالیسم سیرکولاتور و ژیراتور

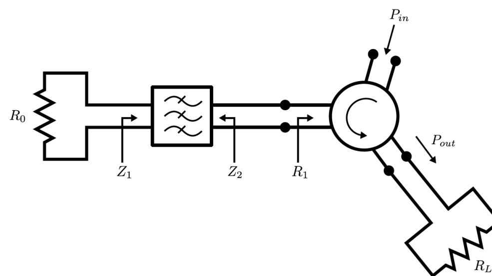
سیرکولاتور را با معرفی یک افزاره بی‌اتلاف سه‌پایانه‌ایِ اساساً جدید بررسی می‌کنیم؛ افزاره‌ای با ماتریس ادمیتانس پایانه‌ای، مستقل از s، به‌صورت:

$$Y_c(s) = G_c \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & -۱ \\ -۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۰ \end{pmatrix}, \qquad (۶.۳)$$

که در آن G_c یک ثابت با واحد وارون امپدانس است. برای هدف این یادداشت‌های درسی، از نماد ویژه‌ای برای این افزاره سه‌پایانه‌ای استفاده می‌کنیم که در شکل ۶-۲ نشان داده شده است. تأکید می‌کنیم که ماتریس ادمیتانس $Y_c(s)$ وارون‌پذیر نیست، زیرا مجموع همه سطرهای آن صفر است؛ بنابراین نمایش امپدانسی ندارد.

این ماتریس نه‌تنها شرط دوسویگی رابطه (۶.۲) را ارضا نمی‌کند، بلکه پادمتقارن است. بنابراین می‌توان آن را شدیدترین نقض ممکنِ دوسویگی، یعنی نوعی پاد-دوسویگی، دانست. در ادامه این بخش، پیامدهای آن را برای نظریه هامیلتونی مدارها و برای وجود چنین عناصر مداری‌ای بررسی خواهیم کرد.

در الکترومغناطیس، فهمیده می‌شود که دوسویگی فقط زمانی برقرار است که پاسخ‌های ماده‌ای دی‌الکتریک و دیامغناطیس، ویژگی‌های تقارنی مشخصی را ارضا کنند؛ ویژگی‌هایی که برای مثال در مواد مغناطیده نقض می‌شوند و به اثر فاراده منجر می‌گردند. بنابراین نباید شگفت‌آور باشد که مدارهای الکتریکی گسسته نیز در برخی شرایط بتوانند



شکل ۶-۴: یک سیرکولاتور متصل به سه خط انتقال. این یک نمونه از کاربرد سیرکولاتور در عمل مهندسی مایکروویو، در یک تقویت‌کننده با مقاومت منفی است. در اینجا R_1 یک مقاومت منفی تفاضلی است، و شبکه دوپورتی تطبیق امپدانس را از Z_1 به Z_2 فراهم می‌کند. برای جزئیات بیشتر، مقاله ویکی‌پدیا درباره مقاومت منفی را ببینید.

دوسویگی را نقض کنند. با این حال، تا سال ۱۹۴۷ [۱۲۱] طول کشید تا تلگن به‌صورت نظری تشخیص دهد که شبکه‌های الکتریکی به چنین عنصری نیاز دارند.

پس از آن، سیرکولاتور در سال ۱۹۵۲ به‌صورت تجربی تحقق یافت [۱۲۲]. سیرکولاتورها به شکل امروزی خود تقریباً از سال ۱۹۶۰ در دسترس بودند. یک سیرکولاتور مدرن با سیستم انتقالی که به آن متصل می‌شود، تطبیق امپدانس دارد؛ یعنی:

$$Z_0 = 50\Omega,$$

و پاسخی متناظر با Y_c نشان می‌دهد، به معنایی که به‌زودی درباره آن بحث خواهیم کرد، روی یک بازه فرکانسی پهن اما متناهی، برای مثال $2\text{–}8\,\text{GHz}$. در اصل، هیچ دلیل فیزیکی وجود ندارد که پاسخ سیرکولاتور نتواند در همه فرکانس‌ها رخ دهد، و نظریه مدار نیز همین را فرض می‌کند. بنابراین، نظریه QED مداری خود را با پاسخ ایده‌آل رابطه (۳.۶) تکمیل خواهیم کرد. مدل‌سازی پاسخ با پهنای‌باند محدودِ یک سیرکولاتور واقعی، نیازمند افزودن مؤلفه‌های متداول، یعنی القاگرها و خازن‌ها، به مدل است [۱۲۳].

برای فهم این‌که دقیقاً چه چیزی در یک سیرکولاتور «سیرکوله» می‌شود، مفید است ماتریس پراکندگی $S(s)$ را از ماتریس $Y_c(s)$ بالا محاسبه کنیم. ابتدا هر یک از سه پایانه را به‌عنوان پورت در نظر می‌گیریم؛ این یعنی هر پایانه را با زمین جفت می‌کنیم. این کار در سیرکولاتور آزمایشگاهی کاملاً طبیعی انجام می‌شود، زیرا هر پورت یک اتصال هم‌محور، یا coaxial connection، است؛ شکل ۶-۳ را ببینید. سپس می‌توان تصور کرد که هر سه پورت به خط‌های انتقال با امپدانس مشخصه Z_0 متصل شده‌اند؛ مانند شکل ۵-۲ برای یک شبکه عمومی N-پورتی. اگر سیرکولاتور و خط‌های انتقال تطبیق امپدانس داشته باشند، یعنی:

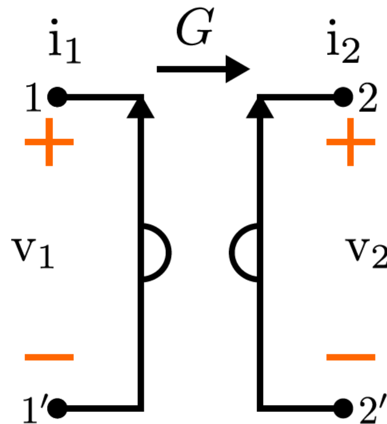
$$G_c^{-1} = Z_0,$$

آنگاه با استفاده از رابطه (۱۵.۵)، ماتریس پراکندگی سیرکولاتور را به‌دست می‌آوریم؛ این را بررسی کنید:

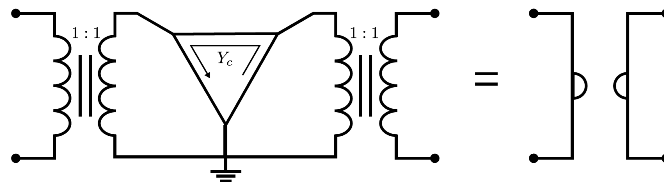
$$S_c(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{۴.۶}$$

ماتریس $S_c(s)$ می‌گوید سیگنالی که از پورت ۳ وارد شود از پورت ۱ خارج می‌شود، سیگنال پورت ۱ از پورت ۲ خارج می‌شود، و سیگنال پورت ۲ از پورت ۳ خارج می‌شود. بنابراین، مانند یک میدان یا مسیر دَورانی، سیگنال فقط می‌تواند در یک جهت بچرخد. این همان اطلاعاتی است که در نماد متداول سیرکولاتور منتقل می‌شود؛ همان‌طور که در کارهای مهندسی عملی در شکل ۶-۴ دیده می‌شود. برای توضیح بیشتر، مقاله ویکی‌پدیا درباره Circulator را نیز ببینید.

تلگن، در واقع، مؤلفه‌ای کمی متفاوت، یعنی ژیراتور، را به‌عنوان عنصر جدید مدار الکتریکی معرفی کرد. نماد ژیراتور در شکل ۶-۵ نشان داده شده است. واژه سیرکولاتور و ایده پشت آن، تا چهار سال پس از کار او ظاهر نشد. ما بیان می‌کنیم که این دو، تجلی‌های متفاوتی از همان پاسخ پایه مداری هستند که توسط Y_c توصیف می‌شود. تفاوت در این است که آن‌ها چگونه با یک پاسخ چندپورتی مرتبط می‌شوند.



شکل ۶-۵: نماد مداری یک ژیراتور.



شکل ۶-۶: به‌دست‌آوردن یک ژیراتور از Y_c با استفاده از ترانسفورمرهای ایده‌آل.

اگر هر یک از سه پایانه به‌طور جداگانه با زمین جفت شود، همان‌طور که در شکل ۶-۳ نشان داده شد، Y_c به یک سیرکولاتور تبدیل می‌شود. در یک ژیراتور، شکل ۶-۶ را ببینید، یکی از پایانه‌های Y_c جدا می‌شود، که در اینجا به‌عنوان زمین نشان داده شده است، و دو پورت با استفاده از کوپلینگ ترانسفورمری تعریف می‌شوند؛ شکل ۶-۲ و بحث آن را به یاد آورید. این ساختار ویژگی‌ای دارد که اغلب به‌طور ضمنی پذیرفته می‌شود، اما به‌ندرت به‌عنوان ویژگی یک افزاره چندپورتی بیان می‌شود؛ یعنی این‌که پورت‌ها از نظر الکتریکی از یکدیگر ایزوله هستند.

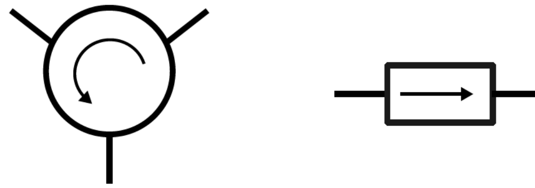
اکنون لحظه‌ای درباره این ایده «ایزولاسیون» توضیح می‌دهیم. از نظر ریاضی، نتیجه وارد کردن ترانسفورمرها این است که هر چهار پایانه متغیرهای مستقلی هستند؛ یعنی هیچ زمین مشترکی وجود ندارد.

در آزمایش‌ها، این موضوع اجازه می‌دهد که یک بخش از مدار نسبت به بخش دیگر دارای «ولتاژ شناور» باشد. بسته به وضعیت آزمایش، داشتن چنین ایزولاسیون الکتریکی‌ای می‌تواند بسیار سودمند باشد؛ از سوی دیگر، گاهی الزامات آزمایش ایجاب می‌کند که در همه‌جای آزمایش یک زمین مشترک وجود داشته باشد. نظریه‌پردازان، حتماً وقتی مدار دوستان آزمایشگر خود را مدل می‌کنید، از آن‌ها بپرسید که آیا از مدار شناور استفاده می‌کنند یا نه! گاهی آن‌ها برای گفتن این موضوع بیش از حد خجالتی هستند. برای زمین‌کردن‌های مختلف در کیوبیت‌های ترانسمون، تمرین ؟؟ را ببینید، و همچنین برای اطلاعات بیشتر درباره این موضوع، مدخل ویکی‌پدیا درباره floating ground را ببینید.

در شکل ۶-۷، نمادهایی را نشان می‌دهیم که اغلب در نمودارهای مدارهای مایکروویوی برای سیرکولاتور و ژیراتور می‌بینید. این نمادها از دیدگاه ما به مقداری تفسیر نیاز دارند: خطوط تکی نشان‌دهنده پورت‌ها هستند، نه پایانه‌ها، و باید خودتان تشخیص دهید که چه نوع طرح زمین‌کردن یا ایزولاسیونی مد نظر است.

این موضوع بر وظیفه اصلی ما اثر خواهد گذاشت؛ وظیفه‌ای که در ادامه به آن می‌پردازیم، یعنی وارد کردن جمله‌هایی در لاگرانژی و هامیلتونی مدار که اثر ژیراتور یا سیرکولاتور را نمایش دهند. در حالت کاملاً ایزوله، اشاره کردیم که ژیراتور چهار شار گره‌ای مستقل دارد. با ایزولاسیون ترانسفورمریِ اضافی، یعنی اگر به هر پورت در شکل ۶-۳ ترانسفورمر اضافه شود، سیرکولاتور شش شار گره‌ای مستقل خواهد داشت.

در بسیاری از کاربردها، اگر ایزولاسیون پورت وجود نداشته باشد مشکلی ایجاد نمی‌شود؛ بنابراین، برای مثال، دو گره پایینی ژیراتور به هم متصل می‌شوند. این موضوع معمولاً، اما نه همیشه، وقتی چنین نیتی وجود داشته باشد، به‌صورت صریح در نقشه مداری ژیراتور نشان داده می‌شود. در نمادگذاری جریان‌های سیگنال مایکروویوی، که در آن نماد متداول ژیراتور همان نماد نشان‌داده‌شده در شکل ۶-۷ است، هیچ راهی برای نشان دادن این تمایز وجود ندارد.



شکل ۶-۷: نمایش سیرکولاتور، در سمت چپ، و ژیراتور، در سمت راست، که در نمودارهای مدارهای مایکروویوی رایج هستند.

برای تأکید دوباره، این اتصال به هم برای ما بسیار مهم است، زیرا می‌تواند تعداد شارهای گره‌ای مستقل در مدار را کاهش دهد.

از این نقطه به بعد، ما با ژیراتور ادامه خواهیم داد. حالت سیرکولاتور یا عنصر پایه Y_c را نیز می‌توان به‌صورت مشابه پوشش داد.

وجود یک ژیراتور به‌وضوح بر دینامیک یک مدار اثر می‌گذارد؛ بنابراین باید به‌نحوی بر ساخت لاگرانژی و هامیلتونی نیز اثرگذار باشد. با این حال، با وضعیتی پارادوکسیکال روبه‌رو می‌شویم: وقتی تلگن در نخستین مقاله خود ژیراتور را معرفی کرد، یکی از اولین چیزهایی که درباره آن اثبات کرد این بود که ژیراتور بی‌اتلاف است، اما هیچ انرژی‌ای ذخیره نمی‌کند. این یعنی نمی‌توانیم اصلی را که در بخش ۲-۲ استفاده کردیم به‌کار ببریم؛ یعنی ساختن لاگرانژی با جمع‌کردن سهم انرژی هر عنصر مداری. برای به‌دست‌آوردن سهم ژیراتور در لاگرانژی، به اصل دیگری نیاز داریم؛ همان‌طور که در مورد ترانسفورمر در بخش ؟؟ انجام دادیم. خواهیم دید که می‌توان جمله‌ای اضافه کرد که با این مشاهده سازگار است که ژیراتور، از نظر کلاسیکی، بر انرژی اثر نمی‌گذارد، اما با این حال اثر واقعی بر دینامیک مدار دارد و همچنین بر کوانتش مدار نیز اثر واقعی می‌گذارد.

برای ادامه، ابتدا دوباره بیان می‌کنیم که ژیراتور چه شرط‌هایی را بر دینامیک مدار تحمیل می‌کند. با استنتاج از Y_c و با استفاده از نمایش شکل ۶-۶، درمی‌یابیم که ژیراتور دارای ماتریس ادمیتانس دوپورتی زیر است:

$$Y_{\text{gyr}}(s) = Y_{\text{gyr}} = G \begin{pmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}, \tag{۵.۶}$$

که در آن

$$G = G_c.$$

توجه کنید که چون این ماتریس، ماتریس ادمیتانس دو پورت است، وارون‌پذیر است؛ یعنی:

$$Z_{\text{gyr}}(s) = Y_{\text{gyr}}^{-۱}(s) \propto Y_{\text{gyr}}(s). \tag{۶.۶}$$

تمرین ۱.۳.۶

رابطه (۵.۶) را با استفاده از شکل ۶-۶ و عملکرد ترانسفورمرهای ایده‌آل که در بخش ۲-۳ داده شده‌اند، و همچنین با فرض $G = G_c$ تأیید کنید. از این قرارداد استفاده کنید که سطر اول ماتریس $Y_{\text{gyr}}(s)$ پورت چپ در شکل ۶-۶ را نشان می‌دهد و سطر دوم پورت راست را.

پاسخ تمرین ۱.۳.۶

با گرفتن

$$I(s) = Y_c(s)V(s),$$

و محدودکردن ورودی به شکل

$$V^T(s) = \big(V_۱(s), V_۲(s), ۰\big),$$

توجه کنید که چرخش پادساعت‌گرد از

$$۱ \to ۲ \to ۳ \to ۱$$

بردار زیر را می‌دهد:

$$I^T(s) = G_c\big(V_۲(s), -V_۱(s), V_۱(s) - V_۲(s)\big).$$

از این رابطه می‌توان با تغییر برچسب‌گذاری پورت‌ها، رابطه (۵.۶) را نتیجه گرفت.

برای کامل‌بودن، رابطه (۵.۶) را به‌صورت مؤلفه‌ای می‌نویسیم:

$$I_۱(s) = -GV_۲(s),$$
$$I_۲(s) = GV_۱(s). \qquad (۷.۶)$$

این نوعی ویژگی ترانسفورمری است که در آن ورودی، یعنی پورت ۱، توسط G به خروجی، یعنی پورت ۲، «بالا برده» می‌شود. اما در واقع با ترانسفورمر کاملاً متفاوت است؛ روابط (۲-۴۶) در بخش ۲-۳ را ببینید. تفاوت در این است که ژیراتور هنگام رفتن از ورودی به خروجی، جریان را به ولتاژ «ژیرات» می‌کند.

تمرین ۲.۳.۶

ماتریس ادمیتانس ژیراتور را در حوزه زمان بنویسید و نشان دهید که این امر نتیجه می‌دهد:

$$i_۱(t) = -Gv_۲(t),$$
$$i_۲(t) = Gv_۱(t). \qquad (۸.۶)$$

پاسخ تمرین ۲.۳.۶

اگر

$$s = i\omega$$

بگیریم، می‌توانیم از تبدیل فوریه معکوس استفاده کنیم؛ رابطه (۴.۵) را ببینید:

$$Y_{\rm gyr}(t) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i\omega t} Y_{\rm gyr}(s = i\omega).$$

۶-۳ ماتریس ادمیتانس ژیراتور

به‌دست می‌آوریم:

$$Y_{\rm gyr}(t) = \delta(t) Y_{\rm gyr}, \qquad (۹.۶)$$

که بلافاصله رابطه (۸.۶) را نتیجه می‌دهد.

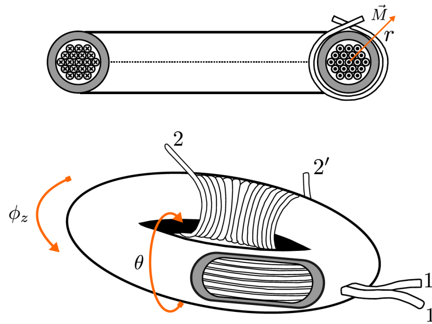
اگر ژیراتور بخشی از یک مدار تطبیق‌امپدانس‌شده باشد، یعنی

$$Z_۰ = G^{-۱},$$

و دو خط انتقال در پورت‌های آن، مانند شکل ۵-۲، متصل باشند، آنگاه ماتریس پراکندگی آن $S_{\rm gyr}(s)$ بسیار ساده است:

$$S_{\rm gyr}(s) = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix}. \qquad (۱۰.۶)$$

این نتیجه را می‌توان، مشابه الگوی سیرکولاتور، از رابطه (۱۵.۵) که روی $Y_{\rm gyr}(s)$ اعمال می‌شود، به‌دست آورد؛ این را بررسی کنید.



شکل ۶-۸: ژیراتور سیم‌پیچی ثبت اختراع‌شده توسط تلگن، بازتولیدشده از مرجع [۱۱۹].

تمرین ۶.۳.۳

در این تمرین، یک تحلیل کیفی از ژیراتور فیزیکی‌ای انجام می‌دهیم که در سال ۱۹۵۴ توسط تلگن پیشنهاد شد [۱۱۹]؛ شکل ۶-۸ را ببینید. در این شکل، جهت شعاعی $\hat{r}$ و جهت زاویه‌ای $\hat{\phi}_z$ در دستگاه مختصات توروئیدی نشان داده شده‌اند.

۱. دو سیم‌پیچ موجود در شکل ۶-۸ را در نظر بگیرید. با استفاده از استدلال‌های مغناطواستاتیک نشان دهید که اندوکتانس متقابل میان سیم‌پیچ $1' - 1$، یعنی پورت ۱، و سیم‌پیچ $2' - 2$، یعنی پورت ۲، صفر است؛ همان‌طور که در شکل پایین نشان داده شده است.

۲. با توجه به ویژگی‌های خاص ماده‌ای که پوسته توروئید، یعنی بخش خاکستری، را تشکیل می‌دهد، در واقع کوپلینگی میان دو سیم‌پیچ وجود خواهد داشت. برای این منظور فرض می‌کنیم که ماده، یک ماده هال کوانتومی نامتعارف است. این یعنی ماده مطابق آنچه در بخش راست شکل ۶-۸، در بالا، نشان داده شده است، مغناطیده شده و بردار مغناطش $\vec{M}$ در راستای $\hat{r}$ قرار دارد. در نتیجه، ماده اثر هال نشان می‌دهد: اگر میدان الکتریکی مماس بر ماده نازک اعمال شود، جریانی عمود بر این میدان و با جهتی مطابق قاعده دست راست برقرار می‌شود.

با توجه به همه این موارد، به یاد آورید که برای تحلیل مؤلفه‌های غیرقطری ماتریس امپدانس ۲×۲، یعنی $Z(i\omega)$، باید جریانی به پورت اول اعمال کرد و ولتاژ مدار باز در پورت دوم را تعیین نمود. یک جریان زمان‌وابسته از نوع $\sin(\omega t)$ را در نظر بگیرید. ماهیت برداری شارهای القاشده، نیروهای محرکه الکتریکی، یعنی میدان‌های الکتریکی، و جریان‌های القاشده را تحلیل کنید. این کار را برای هر دو انتخاب پورت‌های ورودی و خروجی انجام دهید و نشان دهید:

$$Z_{۱۲}(i\omega) = -Z_{۲۱}(i\omega).$$

همچنین تأیید کنید که $Z_{۱۲}$ برای هر انتخابی از ω، حقیقی است.[۲]

پاسخ تمرین ۶.۳.۳

۱. سیم‌پیچ $1' - 1$ میدان مغناطیسی‌ای در راستای $\hat{\theta}$ تولید می‌کند که بر راستای $\hat{\phi}_z$ عمود است؛ بنابراین میدان مغناطیسی‌ای فراهم نمی‌کند که سیم‌پیچ $2' - 2$ بتواند با آن کوپل شود. عکس این موضوع نیز برقرار است.

۲. فرض کنید جریانی از نوع $\sin(\omega t)$ را به پورت ۱، یعنی سیم‌پیچ $1' - 1$، تزریق کنیم. این جریان شار مغناطیسی‌ای در راستای $\hat{\theta}$ تولید می‌کند که آن نیز متناسب با $\sin(\omega t)$ است. این شار، در ماده هال، نیروی محرکه الکتریکی‌ای در راستای $\hat{\phi}_z$ القا می‌کند؛ به دلیل مشتق زمانی، این ولتاژ از نوع $\cos(\omega t)$ خواهد بود.

[۲] با این حال، توجه کنید که $Z_{۱۱}(i\omega)$ و $Z_{۲۲}(i\omega)$ به دلیل خودالقایی صفر نیستند؛ بنابراین این مدار، ژیراتور ایده‌آل رابطه (۶.۶) را نمایش نمی‌دهد.

به دلیل تانسور پاسخ ماده هال، در پوسته رسانای توروئیدی جریانی در راستای $\hat{\theta}$ با فرم تابعی $\cos(\omega t)$ ایجاد می‌شود. این جریان، شاری زمان‌متغیر در راستای $\hat{\phi}_z$ از نوع $\cos(\omega t)$ القأ می‌کند. این شار روی سیم‌پیچ پورت خروجی ۲، یعنی سیم‌پیچ $۲' - ۲$، نیروی محرکه الکتریکی‌ای در راستای $\hat{\theta}$ ایجاد می‌کند؛ با یک مشتق زمانی دیگر، این کمیت از نوع $-\sin(\omega t)$ خواهد بود. این همان ولتاژ مدار باز در پورت ۲، یعنی سیم‌پیچ $۲' - ۲$، است. نسبت ولتاژ خروجی به جریان ورودی،

$$Z_{۲۱}(i\omega) = \frac{V_۲(i\omega)}{I(i\omega)},$$

هم‌فاز است؛ بنابراین $Z_{۲۱}$ حقیقی است.

زنجیره علت و معلول در جهت معکوس مشابه است: جریان $\sin(\omega t)$ در پورت ۲، یعنی سیم‌پیچ $۲' - ۲$، شاری از نوع $\sin(\omega t)$ در راستای $\hat{\phi}_z$ تولید می‌کند. این شار، نیروی محرکه الکتریکی $\cos(\omega t)$ در راستای $\hat{\theta}$ ایجاد می‌کند و جریان هال $\cos(\omega t)$ را در راستای $-\hat{\phi}_z$ به‌وجود می‌آورد. این جریان، شاری $\cos(\omega t)$ در راستای $-\hat{\theta}$ تولید می‌کند و در نتیجه یک نیروی محرکه الکتریکی $-\sin(\omega t)$ در راستای $-\hat{\theta}$ یا معادل آن $\sin(\omega t)$ در راستای $\hat{\phi}_z$ ایجاد می‌شود. این همان ولتاژ مدار باز در پورت ۱، یعنی سیم‌پیچ $۱' - ۱$، است. این فرآیند $Z_{۱۲}$ را به همان روش $Z_{۲۱}$ به‌دست می‌دهد، اما با یک علامت منفی اضافی که از پاددوسویگی پاسخ هال ناشی می‌شود.

۶-۴ لاگرانژی و هامیلتونی ژیراتور

در اینجا نشان می‌دهیم که یک نسخه قابل قبول برای لاگرانژی ژیراتور، هنگامی که در یک مدار ابررسانا ظاهر می‌شود، این است که جمله زیر را به لاگرانژی کل اضافه کنیم:

$$\mathcal{L}_{\text{gyr}} = \frac{G}{۲}\left[(\Phi_۱ - \Phi_{۱'})(\dot{\Phi}_۲ - \dot{\Phi}_{۲'}) - (\Phi_۲ - \Phi_{۲'})(\dot{\Phi}_۱ - \dot{\Phi}_{۱'})\right], \qquad (۱۱.۶)$$

که در آن برچسب‌گذاری شارهای گره‌ای $\Phi_۱, \Phi_{۱'}, \Phi_۲, \Phi_{۲'}$ مانند شکل ۶-۵ است. این به‌وضوح نوع جدیدی از شیء است: ما پیش‌تر چنین جمله کوپلینگ مرتبه اولی میان «سرعت» و «مکان» ندیده بودیم. اگر مکانیک زیادی خوانده باشید، شاید قبلاً با آن برخورد کرده باشید، اما در هر صورت در ادامه توضیح می‌دهیم که این جمله چه کاری انجام می‌دهد. این‌که آیا هر چهار شار گره‌ای ظاهرشده در این جمله لاگرانژی مستقل هستند یا نه، توسط بخش‌های دیگر شبکه تعیین می‌شود. این موضوع برای هامیلتونی‌ای که در نهایت به‌دست می‌آوریم مهم خواهد بود، زیرا فقط برای متغیرهای مستقل تکانه تعریف می‌کنیم؛ اما برای خود لاگرانژی مهم نیست.

در یک چارچوب نسبتاً عمومی، اما نه عمومی‌ترین حالت ممکن، درستی این نسخه را نشان خواهیم داد؛ برای جزئیات بیشتر، مراجع [۳۹، ۱۲۴، ۱۲۵] را ببینید. شکل ۶-۹ را در نظر بگیرید که در آن دو شبکه الکتریکی عمومی با لاگرانژی‌های $\mathcal{L}_۱$ و $\mathcal{L}_۲$ داریم که توسط یک ژیراتور به هم کوپل شده‌اند. گره‌های $\Phi_{g۱}$ و $\Phi_{g۲}$ را به‌عنوان گره‌های مرجع در هر یک از دو گراف، سمت چپ و سمت راست، که مدار را تشکیل می‌دهند، می‌گیریم و قرار می‌دهیم:

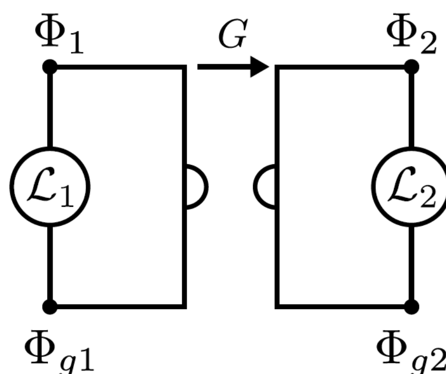
$$\Phi_{g۱} = \Phi_{g۲} = ۰.$$

لاگرانژی‌های $\mathcal{L}_k$ شبکه‌ها فقط تابع‌هایی از Φ_k و $\dot{\Phi}_k$ نیستند، بلکه در حالت کلی به درجات آزادی داخلی اضافی نیز وابسته‌اند. با این حال، این درجات آزادی در این تحلیل اهمیت بیشتری ندارند. اگر ژیراتور ایده‌آل دو پورت خود را به یک زمین مشترک متصل داشته باشد، یعنی:

$$\Phi_{۱'} = \Phi_{۲'} = \dot{\Phi}_{۱'} = \dot{\Phi}_{۲'} = ۰,$$

رابطه (۱۱.۶) به شکل زیر کاهش می‌یابد:

$$\mathcal{L}_{\text{gyr}} = \frac{G}{۲}\left(\Phi_۱\dot{\Phi}_۲ - \dot{\Phi}_۱\Phi_۲\right), \qquad (۱۲.۶)$$



شکل ۶-۹: دو شبکه الکتریکی عمومی با لاگرانژی‌های $\mathcal{L}_۱$ و $\mathcal{L}_۲$، که توسط یک ژیراتور به هم کوپل شده‌اند.

به‌طوری‌که شارهای $\Phi_۱$ و $\Phi_۲$ تنها متغیرهای گره‌ای مستقل هستند.
در این پیکربندی، لاگرانژی کل بنابراین برابر است با:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_۱ + \mathcal{L}_۲ + \mathcal{L}_{\text{gyr}}. \qquad (۱۳.۶)$$

نخست، با انجام مکانیک کلاسیکی، توجه می‌کنیم که جریان عبوری از شبکه الکتریکی با لاگرانژی $\mathcal{L}_k$ به‌صورت زیر داده می‌شود؛ آیا دلیل آن را می‌بینید؟

$$i_{\mathcal{L}_k}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial \dot{\Phi}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial \Phi_k} = -i_k(t). \qquad (۱۴.۶)$$

که در آن i_k جریان عبوری از شاخه متناظر ژیراتور است. طبق تعریف، ولتاژ متناظر آن برابر است با:

$$v_k = \dot{\Phi}_k.$$

از اینجا می‌توان نتیجه گرفت که معادله اویلر–لاگرانژ برای لاگرانژی کل در رابطه (۱۳.۶) نسبت به متغیر $\Phi_۱$ می‌دهد:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_۱}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_۱} = ۰, \\
\iff \quad &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_۱}{\partial \dot{\Phi}_۱}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}_۱}{\partial \Phi_۱} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{gyr}}}{\partial \dot{\Phi}_۱}\right) + \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{gyr}}}{\partial \Phi_۱}, \\
\iff \quad &i_۱(t) = -G v_۲(t).
\end{aligned} \qquad (۱۵.۶)$$

محاسبه مشابه معادله اویلر-لاگرانژ برای $\Phi_۲$ می‌دهد:

$$i_۲(t) = G v_۱(t), \qquad (۱۶.۶)$$

به‌طوری‌که هر دو معادله اویلر-لاگرانژ با هم، مستقیماً ماتریس ادمیتانسی را بازتولید می‌کنند که ژیراتور ایده‌آل کلاسیکی را در حوزه زمان، در رابطه (۸.۶)، مشخص می‌کرد. بنابراین ثابت می‌شود که لاگرانژی بیان‌شده در رابطه (۱۲.۶) واقعاً یک ژیراتور ایده‌آل، مستقل از فرکانس، را توصیف می‌کند.
پس از معرفی توصیف لاگرانژی ژیراتور، یادآوری می‌کنیم که فرمالیسم لاگرانژی اجازه می‌دهد مشتق زمانی کل یک تابع را بدون اثرگذاشتن بر معادلات کلاسیکی حرکت به لاگرانژی اضافه کنیم؛ تمرین ۹-۱ در پیوست ۹ را

ببینید. بنابراین آموزنده است که لاگرانژی عمومی‌تری را برای ژیراتور ایده‌آل در نظر بگیریم که با تبدیل زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathcal{L}_{\text{gyr}} \to \mathcal{L}_{\text{gyr}} + a\frac{d}{dt}\left(\frac{G}{۲}\Phi_۱\Phi_۲\right) = \frac{G}{۲}\left[(۱+a)\Phi_۱\dot{\Phi}_۲ - (۱-a)\dot{\Phi}_۱\Phi_۲\right], \qquad (۱۷.۶)$$

که در آن $a \in \mathbb{R}$ یک ثابت دلخواه است. بنابراین می‌بینیم که یک پیوستار از نمایش‌های مرتبط برای لاگرانژی ژیراتور وجود دارد. در بخش بعدی، این موضوع به‌عنوان یک آزادی گیج در توصیف دینامیک تفسیر خواهد شد.

۶-۴-۱ «میدان مغناطیسی کار انجام نمی‌دهد»؛ ژیراتور به‌عنوان میدان مغناطیسی

از آنجا که همه جمله‌ها در رابطه (۱۷.۶) نسبت به $\dot{\Phi}_i$ خطی هستند، لاگرانژی $\mathcal{L}_{\text{gyr}}$ را می‌توان به‌صورت سهم لاگرانژی یک پتانسیل برداری «مغناطیسی» نوشت و تفسیر کرد:

$$\mathcal{L}_{\text{gyr}} = \mathbf{A}(\mathbf{\Phi})\cdot\dot{\mathbf{\Phi}}, \qquad \mathbf{A}(\mathbf{\Phi}) = \frac{G}{۲}\begin{pmatrix}(a-۱)\Phi_۲\\(a+۱)\Phi_۱\end{pmatrix}. \qquad (۱۸.۶)$$

پتانسیل برداری دوبعدی $\mathbf{A}(\mathbf{\Phi})$ یک میدان مغناطیسی متناظر

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$$

ایجاد می‌کند که بر صفحه $\Phi_۱, \Phi_۲$ عمود است و اندازه آن برابر است با:

$$B_۳ = (\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{\Phi}))_۳ = \frac{\partial A_۲(\mathbf{\Phi})}{\partial\Phi_۱} - \frac{\partial A_۱(\mathbf{\Phi})}{\partial\Phi_۲} = G, \qquad (۱۹.۶)$$

که همان رسانندگی ژیراسیون است.

با توجه به این شباهت میان رسانندگی ژیراسیون و یک میدان مغناطیسی یکنواخت، تبدیل در رابطه (۱۷.۶) معادل یک تبدیل گیج برای پتانسیل برداری است:

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla\lambda.$$

حالت‌های خاص

$$a = \pm ۱$$

و

$$a = ۰$$

به‌ترتیب می‌توانند به‌عنوان دو گیج لانداو متفاوت و یک گیج متقارن شناسایی شوند. در واقع، افزودن مشتق زمانی کلِ هر تابع $\lambda(\mathbf{\Phi})$ به $\mathcal{L}_{\text{gyr}}$ معادل افزودن $\nabla\lambda(\mathbf{\Phi})$ به پتانسیل برداری است، که چرخش آن را تغییر نمی‌دهد؛ زیرا:

$$\nabla\times\nabla\lambda(\mathbf{\Phi}) = ۰.$$

علاوه بر این، نادوسویگی ژیراتور غیرفعال با این تفسیر سازگار است که ژیراتور به‌صورت رسمی مانند یک میدان مغناطیسی ایستای خارجی عمل می‌کند؛ میدانی که تقارن وارونگی زمان را می‌شکند و انرژی سیستم مکانیکی‌ای را که به آن کوپل شده است تغییر نمی‌دهد، یعنی روی آن کار انجام نمی‌دهد.

۶-۴-۲ هامیلتونی ژیراتور

سهم لاگرانژی ژیراتور نخستین گام به سوی یک توصیف نظری کوانتیده از هر مدار الکتریکی شامل هر تعداد ژیراتور است. از آنجا که می‌خواهیم کوانتش را در فرمالیسم هامیلتونی اعمال کنیم، ابتدا باید هامیلتونی متناظر را استخراج کنیم. لاگرانژی یک شبکه الکتریکی عمومی با $N+۱$ گره، که یکی از آن‌ها گره زمین و N تای دیگر مستقل هستند، و از خازن‌ها، هر نوع القاگر، یعنی خطی، غیرخطی و متقابل، و ژیراتورها ساخته شده است، می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود:

$$\mathcal{L} = \frac{۱}{۲}\dot{\mathbf{\Phi}}^T C\dot{\mathbf{\Phi}} + \dot{\mathbf{\Phi}}^T \mathbf{A}(\mathbf{\Phi}) - U(\mathbf{\Phi}). \qquad (۲۰.۶)$$

فرض می‌کنیم ماتریس ظرفیت وارون‌پذیر است؛ یعنی N متغیر گره‌ای مستقل داریم. برای بحث درباره وارون‌پذیری، فصل ۳ و گزاره ؟؟ را ببینید. برای بحث درباره جنبه‌های متعدد حالت تکینِ وارون‌ناپذیر با ژیراتورها، به مرجع [۳۹] ارجاع می‌دهیم. توجه می‌کنیم که با وارد کردن سهم ژیراتور، لاگرانژی همچنان نسبت به متغیرهای $\dot{\mathbf{\Phi}}$ تابعی محدب است؛ بنابراین می‌توانیم با تبدیل لژاندر ادامه دهیم و هامیلتونی را به‌دست آوریم. بردار متغیرهای مزدوج برابر است با:

$$\mathbf{Q} = C\dot{\mathbf{\Phi}} + \mathbf{A}(\mathbf{\Phi}), \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\mathbf{\Phi}} = C^{-۱}\left(\mathbf{Q} - \mathbf{A}(\mathbf{\Phi})\right). \qquad (۲۱.۶)$$

این شکل از متغیر مزدوج را پیش‌تر ندیده بودیم، اما باز هم مشابه توصیف ریاضی دینامیک یک الکترون در میدان مغناطیسی است که در آن متغیر مزدوج، یعنی تکانه، به‌صورت زیر داده می‌شود:

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{x}} + q\mathbf{A}.$$

با کامل کردن تبدیل لژاندر، یک عبارت عمومی برای هامیلتونی به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \dot{\mathbf{\Phi}}^T\mathbf{Q} - \mathcal{L}\\ &= \dot{\mathbf{\Phi}}^T\mathbf{Q} - \frac{۱}{۲}\dot{\mathbf{\Phi}}^T C\dot{\mathbf{\Phi}} - \dot{\mathbf{\Phi}}^T\mathbf{A}(\mathbf{\Phi}) + U(\mathbf{\Phi})\\ &= \frac{۱}{۲}\left(\mathbf{Q} - \mathbf{A}(\mathbf{\Phi})\right)^T C^{-۱}\left(\mathbf{Q} - \mathbf{A}(\mathbf{\Phi})\right) + U(\mathbf{\Phi}). \qquad (۲۲.۶)\end{aligned}$$

تمرین ۶-۴-۲ نشان خواهد داد که این هامیلتونی، وقتی برای حالت دو خازن شنت‌کننده محاسبه شود، دقیقاً همان هامیلتونی یک الکترون محصور در دو بعد در یک میدان مغناطیسی یکنواخت است.

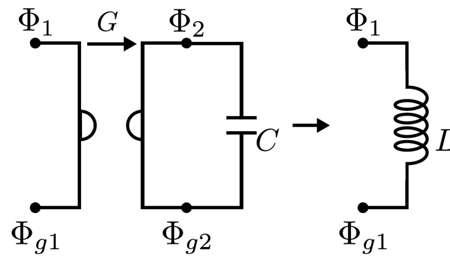
در پژوهش‌های کنونی، اگر ظرفیت در این وضعیت تکین باشد، امکانات عجیب زیادی پدیدار می‌شوند. برای مثال، با شنت‌کردن پورت‌های ژیراتور با پیوندهای جوزفسون، می‌توان انرژی جنبشی‌ای از فرم

$$\cos\left(\frac{\hat{Q}}{۲e}\right)$$

به‌دست آورد [۱۲۶، ۱۲۷]. باور داریم که فهم توصیف هامیلتونی چنین مدارهای نامعمولی می‌تواند به پیشنهادهای تازه‌ای برای تحقق فیزیکی جدید این مدارها منجر شود؛ مدارهایی که سپس می‌توانند فیزیک جدیدی نشان دهند.

تمرین ۶.۴.۱: ژیراتور ایده‌آل

۱. مدار شکل ۶-۹ را برای حالت خاصی در نظر بگیرید که در آن لاگرانژی‌های $\mathcal{L}_۱$ و $\mathcal{L}_۲$ لاگرانژی‌های نوسانگرهای LC با اندوکتانس L و ظرفیت C موازی هستند. فرض کنید اندوکتانس و ظرفیت در دو طرف یکسان باشند. هامیلتونی را در این حالت به‌دست آورید. معادل مکانیکی این سیستم چیست؟



شکل ۶-۱۰: تبدیل یک خازن به یک القاگر با استفاده از ژیراتور.

۲. با استفاده از فرمالیسم لاگرانژی نشان دهید که می‌توان با استفاده از یک ژیراتور، همان‌طور که در شکل ۶-۱۰ نشان داده شده است، یک خازن را به یک القاگر تبدیل کرد. می‌توانیم فرض کنیم که g۱ و g۲ گره‌های مرجع در هر گرافِ جدا از هم هستند و قرار دهیم:

$$\Phi_{g۱} = \Phi_{g۲} = ۰.$$

مقدار اندوکتانس معادل L را به‌دست آورید.

پاسخ تمرین ۶.۴.۱

۱. در حالت دو نوسانگر LC، لاگرانژی شکل ۶-۹ به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathcal{L} = \frac{C}{۲}\dot{\Phi}_۱^۲ - \frac{\Phi_۱^۲}{۲L} + \frac{C}{۲}\dot{\Phi}_۲^۲ - \frac{\Phi_۲^۲}{۲L} + \frac{G}{۲}\left(\Phi_۱\dot{\Phi}_۲ - \dot{\Phi}_۱\Phi_۲\right). \qquad (۶.۲۳)$$

برای به‌دست‌آوردن هامیلتونی، متغیرهای مزدوج را تعریف می‌کنیم:

$$Q_۱ = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\Phi}_۱} = C\dot{\Phi}_۱ - \frac{G}{۲}\Phi_۲, \qquad (۶.۲۴a)$$

و

$$Q_۲ = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\Phi}_۲} = C\dot{\Phi}_۲ + \frac{G}{۲}\Phi_۱. \qquad (۶.۲۴b)$$

با گرفتن تبدیل لژاندر، به‌دست می‌آوریم:

$$H = Q_۱\dot{\Phi}_۱ + Q_۲\dot{\Phi}_۲ - \mathcal{L} = \frac{\left(Q_۱ + \frac{G}{۲}\Phi_۲\right)^۲}{۲C} + \frac{\left(Q_۲ - \frac{G}{۲}\Phi_۱\right)^۲}{۲C} + \frac{\Phi_۱^۲}{۲L} + \frac{\Phi_۲^۲}{۲L}. \qquad (۶.۲۵)$$

توجه می‌کنیم که این هامیلتونی همان ساختار هامیلتونی یک ذره باردار را دارد که در دو بعد، در یک میدان مغناطیسی ثابت عمود بر صفحه، و علاوه بر آن در یک پتانسیل سهموی، حرکت می‌کند. این موضوع حتی روشن‌تر می‌شود اگر پتانسیل برداری موهومی زیر را تعریف کنیم:

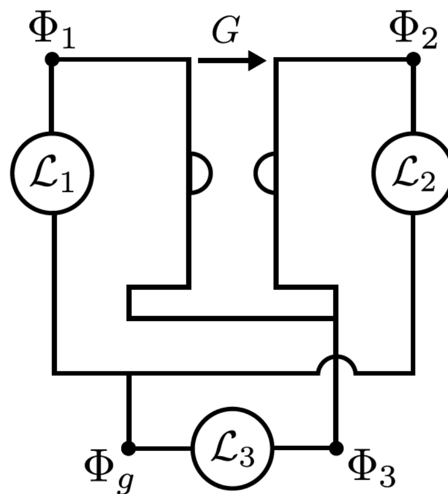
$$A^T = (A_۱, A_۲) = \frac{G}{۲}(-\Phi_۲, \Phi_۱), \qquad (۶.۲۶)$$

و هامیلتونی را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$H = \frac{|\mathbf{Q} - \mathbf{A}|^۲}{۲C} + \frac{\Phi_۱^۲}{۲L} + \frac{\Phi_۲^۲}{۲L}, \qquad (۶.۲۷)$$

که در آن:

$$\mathbf{Q} = (Q_۱, Q_۲)^T.$$



شکل ۶-۱۱: ساختار کارلین برای یک سیرکولاتور. در اینجا سه پایانه برچسب‌گذاری شده‌اند و فرض می‌شود که با پایانه‌های شکل ۶-۲ متناظر باشند.

۲. لاگرانژی مدار شکل ؟؟ به‌صورت زیر است:

$$\mathcal{L} = \frac{G}{۲}\left(\Phi_۱\dot{\Phi}_۲ - \dot{\Phi}_۱\Phi_۲\right) + \frac{C}{۲}\dot{\Phi}_۲^۲. \qquad (۲۸.۶)$$

معادله اویلر–لاگرانژ متناظر با $\Phi_۲$ چنین است:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_۲}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_۲} = G\dot{\Phi}_۱ + C\ddot{\Phi}_۲ = ۰ \quad \Rightarrow \quad \dot{\Phi}_۲ = -\frac{G}{C}\Phi_۱ + \alpha, \qquad (۲۹.۶)$$

که در آن $\alpha \in \mathbb{R}$ است. با جایگذاری این نتیجه در لاگرانژی رابطه (۲۸.۶)، به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{G}{۲}\Phi_۱\left(-\frac{G}{C}\Phi_۱ + \alpha\right) - \frac{G}{۲}\dot{\Phi}_۱\Phi_۲ + \frac{C}{۲}\dot{\Phi}_۲\left(-\frac{G}{C}\Phi_۱ + \alpha\right)\\ &= -\frac{۱}{۲C/G^۲}\Phi_۱^۲ - \frac{G}{۲}\frac{d(\Phi_۱\Phi_۲)}{dt} + \frac{\alpha G}{۲}\Phi_۱ + \frac{\alpha C}{۲}\dot{\Phi}_۲\\ &= -\frac{۱}{۲C/G^۲}\Phi_۱^۲ - \frac{G}{۲}\frac{d(\Phi_۱\Phi_۲)}{dt} + \frac{C}{۲}\alpha^۲. \qquad (۳۰.۶)\end{aligned}$$

این همان لاگرانژی یک القاگر با

$$L = \frac{C}{G^۲}$$

به‌علاوه یک مشتق زمانی کل و یک ثابت است. مشتق زمانی کل، معادلات اویلر-لاگرانژ را تغییر نمی‌دهد؛ تمرین ۹-۱ را ببینید. بنابراین می‌توان آن را حذف کرد.

مدار نشان‌داده‌شده در شکل ۶-۱۱ را در نظر بگیرید. این مدار روشی برای ساخت یک سیرکولاتور را نشان می‌دهد: عنصر سه‌پایانه‌ای شکل ۶-۲، که از یک ژیراتور به‌دست آمده و به ساختار کارلین معروف است، به یک مدار خارجی با چند لاگرانژی $\mathcal{L}_i$ متصل می‌شود. بنابراین، این ساختار کم‌وبیش نقطه مقابل شکل ۶-۶ است؛ جایی که در آن از عنصر Y_c یک ژیراتور به‌دست می‌آید.

۱. با شروع از لاگرانژی ژیراتور معرفی‌شده در رابطه (۱۲.۶)، و با قرار دادن $\Phi_g = ۰$ به‌عنوان شار گره مرجع، نشان دهید که لاگرانژی سیرکولاتور را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathcal{L}_{\text{cir}} = G\left(\Phi_۱\dot{\Phi}_۲ + \Phi_۲\dot{\Phi}_۳ + \Phi_۳\dot{\Phi}_۱\right). \qquad (۳۱.۶)$$

۲. راهنمایی: به یاد داشته باشید که جمع‌کردن یک مشتق زمانی کل به لاگرانژی، معادلات حرکت را تغییر نمی‌دهد؛ تمرین ۹-۱ را ببینید.

۳. با تکیه بر شهودی که در تمرین ۶-۴-۲ ایجاد شد، ماتریس ادمیتانس $Y_c(s)$ یک سیرکولاتور را، مانند رابطه (۳.۶)، از معادلات حرکت استخراج کنید.

۴. از ماتریس ادمیتانس، ماتریس پراکندگی را به‌دست آورید؛ با این فرض که همه خطوط انتقالِ متصل به پورت‌های سیرکولاتور، امپدانس مشخصه Z. دارند. ثابت ژیراسیون G را طوری به‌دست آورید که ماتریس پراکندگی به ماتریس پراکندگی سیرکولاتور ایده‌آلِ تطبیق‌امپدانس‌شده S_c در رابطه (۴.۶) تبدیل شود. اگر خط انتقال تطبیق امپدانس نداشته باشد، چه اتفاقی می‌افتد؟

پاسخ تمرین ۲.۴.۶

۱. لاگرانژی بخش سیرکولاتورِ مدار در شکل ۶-۱۱ مستقیماً از لاگرانژی $\mathcal{L}_{\text{gyr}}$ در رابطه (۱۱.۶) به‌دست می‌آید:

$$\mathcal{L}'_{\text{cir}} = \frac{G}{۲}\left(\Phi_۱\dot{\Phi}_۲ - \dot{\Phi}_۱\Phi_۲ + \Phi_۲\dot{\Phi}_۳ - \dot{\Phi}_۲\Phi_۳ + \Phi_۳\dot{\Phi}_۱ - \dot{\Phi}_۳\Phi_۱\right). \qquad (۳۲.۶)$$

می‌بینیم که این رابطه به شکل رابطه (۳۱.۶) نیست، اما می‌توان با افزودن یک مشتق زمانی کل به لاگرانژی، آن را به آن فرم تبدیل کرد. یعنی یک لاگرانژی معادل برای سیرکولاتور برابر است با:

$$\mathcal{L}_{\text{cir}} = \mathcal{L}'_{\text{cir}} + \frac{G}{۲}\frac{d}{dt}\left(\Phi_۱\Phi_۲ + \Phi_۲\Phi_۳ + \Phi_۳\Phi_۱\right). \qquad (۳۳.۶)$$

۲. اکنون می‌توانیم برای یافتن ماتریس ادمیتانس پیش برویم. لاگرانژی کل را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_۱ + \mathcal{L}_۲ + \mathcal{L}_۳ + \mathcal{L}_{\text{cir}}, \qquad (۳۴.۶)$$

که در آن:

$$\mathcal{L}_k = \mathcal{L}_k\left(\{\Phi_k, \dot{\Phi}_k\}\right), \qquad k \in \{۱, ۲, ۳\}.$$

جریان‌های $i_{\mathcal{L}_k}$ عبوری از عنصری با لاگرانژی $\mathcal{L}_k$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$i_{\mathcal{L}_k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial \dot{\Phi}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial \Phi_k}. \qquad (۳۵.۶)$$

در همین حال داریم:

$$۰ = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_k} = i_{\mathcal{L}_k} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{cir}}}{\partial \dot{\Phi}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{cir}}}{\partial \Phi_k}. \qquad (۳۶.۶)$$

با گرفتن قرارداد $i_k = i_{\mathcal{L}_k}$ به‌عنوان جریانی که وارد پایانه می‌شود، معادلات اویلر–لاگرانژ متناظر با متغیرهای $\Phi_۱$، $\Phi_۲$ و $\Phi_۳$ به‌ترتیب چنین خوانده می‌شوند:

$$i_۱ + G\dot{\Phi}_۳ - G\dot{\Phi}_۲ = ۰, \tag{a۳۷.۶}$$

$$i_۲ + G\dot{\Phi}_۱ - G\dot{\Phi}_۳ = ۰, \tag{b۳۷.۶}$$

$$i_۳ + G\dot{\Phi}_۲ - G\dot{\Phi}_۱ = ۰. \tag{c۳۷.۶}$$

این روابط را می‌توان به‌صورت فشرده چنین نوشت:

$$\begin{pmatrix} i_۱(t) \\ i_۲(t) \\ i_۳(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ & G & -G \\ -G & ۰ & G \\ G & -G & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_۱(t) \\ v_۲(t) \\ v_۳(t) \end{pmatrix}. \tag{۳۸.۶}$$

بنابراین می‌توانیم ماتریس ادمیتانس سیرکولاتور را، در حوزه لاپلاس، به‌صورت زیر شناسایی کنیم:

$$Y_c(s) = G \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & -۱ \\ -۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۰ \end{pmatrix}. \tag{۳۹.۶}$$

۳. برای به‌دست‌آوردن ماتریس پراکندگی از ماتریس ادمیتانس، از رابطه (۱۵.۵) استفاده می‌کنیم، که در آن $Z_۰$ امپدانس مشخصه خطوط انتقال است. به‌دست می‌آوریم:

$$S_c = \frac{۱}{۳G^۲Z_۰^۲ + ۱} \begin{pmatrix} ۱ - G^۲Z_۰^۲ & ۲GZ_۰(GZ_۰ - ۱) & ۲GZ_۰(GZ_۰ + ۱) \\ ۲GZ_۰(GZ_۰ + ۱) & ۱ - G^۲Z_۰^۲ & ۲GZ_۰(GZ_۰ - ۱) \\ ۲GZ_۰(GZ_۰ - ۱) & ۲GZ_۰(GZ_۰ + ۱) & ۱ - G^۲Z_۰^۲ \end{pmatrix}. \tag{۴۰.۶}$$

این ماتریس فقط برای

$$G = Z_۰^{-۱}$$

به یک سیرکولاتور تطبیق‌امپدانس‌شده بدون بازتاب ناخواسته، مانند رابطه (۴.۶)، تبدیل می‌شود. اگر تطبیق امپدانس کامل نباشد، می‌بینیم که مثلاً از پورت ۱ هم به پورت ۲ و هم به پورت ۳ انتقال وجود دارد و علاوه بر آن بازتاب نیز رخ می‌دهد.

فصل ۷

نویز، یا هر آنچه ممکن است خراب شود

منابع فیزیکی نویز، اتلاف و کنترل محدود در افزاره‌های ابررسانا بسیار متنوع‌اند و موضوعی فراتر از این کتاب هستند. در این فصل، ابتدا مدل‌سازی نویز را در بخش‌های ۹-۱ و ۹-۲ بررسی می‌کنیم و سپس در بخش ۹-۳ برخی جنبه‌های حساسیت به نویز و حفاظت در برابر نویز را در کیوبیت‌های ابررسانا بحث می‌کنیم.

۷-۱ مدل معادله‌ی مستر لیندبلاد

همان‌طور که در بخش ۵-۳ و پیوست ۱۰-۳ دیدیم، می‌توان هامیلتونی H و نرخ‌های واپاشیِ نامنفی κ_m متناظر با مُدهای $\hat{a}_m$ یک شبکه خطی دوسویه N-پورتی را به‌دست آورد؛ شبکه‌ای که N پیوند جوزفسون به آن متصل شده‌اند. یک مدل دینامیکی ساده برای استفاده از این پارامترها، معادله مستر لیندبلاد است:

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \sum_{m=۱}^{M} \kappa_m \mathcal{D}[\hat{a}_m](\rho), \quad (۷.۱)$$

که در آن برای هر عملگر A، تعریف زیر را داریم:

$$\mathcal{D}[A](\rho) = A\rho A^\dagger - \frac{۱}{۲}\left\{A^\dagger A, \rho\right\}.$$

در اینجا H هامیلتونی‌ای مانند رابطه (۵.۳۳) است و $\hat{a}_m$ عملگر نابودی مُد $m = ۱, \ldots, M$ از شبکه است.

چنین معادله مستری به‌طور ضمنی فرض می‌کند که نویز مارکوفی است: محیطی که نویز را وارد می‌کند، به‌اندازه کافی بزرگ است که در اثر برهم‌کنش ضعیف با سیستم، که دینامیک داخلی آن توسط H کنترل می‌شود، تغییر نکند. اگر این تقریب معتبر نباشد، باید از معادلات دینامیکی‌ای استفاده کرد که معمولاً هم سیستم و هم محیط را شامل می‌شوند. در بعضی موارد، می‌توان مدل‌هایی ساخت که در آن‌ها محیط کاملاً کلاسیکی اما نامارکوفی است و با هم‌بستگی‌های زمانی بلند مشخص می‌شود؛ مانند نویز تلگرافی تصادفی. در حوزه فوریه، نویزهایی با هم‌بستگی زمانی بلند، مؤلفه‌های قوی در فرکانس‌های پایین دارند. به‌طور کلی، چنین نویزی را نویز $۱/f$ می‌نامند، زیرا دامنه آن اغلب مانند $۱/f$ مقیاس می‌شود. نمونه‌ها شامل نویز ناشی از محیطِ نقص‌های دوسطحی، نویز ناشی از دینامیک شبه‌ذرات، یا سایر نویزهای شار و بار با هم‌بستگی زمانی هستند. برای نویزهای دارای هم‌بستگی زمانی، معمولاً واپاشی نمایی همدوسی کیوبیت به‌دست نمی‌آید، بلکه واپاشی‌ای از فرم

$$\exp(-\gamma t^\alpha)$$

با $\alpha > ۱$ حاصل می‌شود؛ واپاشی توانی نیز ممکن است، برای نمونه مراجع [۱۲۸، ۱۲۹] را ببینید.

در معادله مستر بالا فقط اتلاف انرژی مدل شده است. اما اگر فرکانس مُد نسبت به دمای یخچال رقیق‌ساز، مثلاً

$$T \approx ۲۰ \text{ mK},$$

نسبتاً پایین باشد، باید هم اتلاف و هم بهره را وارد کرد. در این صورت داریم:

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H,\rho] + \sum_{m=۱}^{M} \kappa_{m,-}\mathcal{D}[\hat{a}_m](\rho) + \sum_{m=۱}^{M} \kappa_{m,+}\mathcal{D}[\hat{a}_m^\dagger](\rho), \tag{۲.۷}$$

که در آن:

$$\kappa_{m,-} = \kappa_m\left[۱ + \bar{n}(\omega_m)\right], \qquad \kappa_{m,+} = \kappa_m \bar{n}(\omega_m),$$

و عدد اشغال گرمایی برابر است با:

$$\bar{n}(\omega_m) = \frac{۱}{e^{\beta\hbar\omega_m} - ۱}, \tag{۳.۷}$$

با بتای ترمودینامیکی:

$$\beta = \frac{۱}{k_B T}.$$

اگرچه برای یک کیوبیت ترانسمون، مثلاً در فرکانس ۵ GHz، مقدار $\bar{n}$ از دید گرمایی بسیار کوچک است، منابع اضافی برانگیزش نیز شناخته شده‌اند؛ تمرین ۷-۱ را ببینید.

اکنون تصور کنید فقط یک پیوند جوزفسون وجود دارد، یعنی $N = ۱$، و بنابراین می‌خواهیم ناهمدوسی کیوبیت متناظر با آن پیوند جوزفسون را بررسی کنیم. در این حالت، رابطه (۲.۷) روش خیلی مستقیم و کارآمدی برای انجام این کار به نظر نمی‌رسد، زیرا نویز از طریق M مُدی وارد می‌شود که کیوبیت به آن‌ها کوپل شده است. یک مدل مستقیم‌تر از یک مدار کیوبیتی شروع می‌کند که به یک شاخه مداری اتلافی متصل شده است؛ این موضوع در بخش ۹-۲ و پیوست ۱۰-۴ بررسی خواهد شد.

در ادامه این بخش، برخی جنبه‌های یک معادله لیندبلاد عمومی برای کیوبیت را، با فرض این‌که بتوان آن را برای مدل‌سازی نویز استخراج کرد، از طریق دو تمرین بررسی می‌کنیم.

نسخه کیوبیتی معادله لیندبلاد در رابطه (۲.۷)، با

$$H = -\frac{\hbar\Omega}{۲}Z,$$

به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H,\rho] + \kappa_-\mathcal{D}[\sigma^-](\rho) + \kappa_+\mathcal{D}[\sigma^+](\rho), \tag{۴.۷}$$

که در آن:

$$\kappa_+ = \kappa_- e^{-\beta\hbar\Omega}.$$

حل دینامیک معادله لیندبلاد کیوبیت سرراست است؛ تمرین ۷-۱ را ببینید. حالت کیوبیت $\rho(t)$، در زمان‌های کافی طولانی t، به حالت گیبس

$$\rho_\beta = \frac{e^{-\beta H}}{\mathrm{Tr}(e^{-\beta H})}$$

متعادل می‌شود. زمان آرامش $T_۱$، نرخ واپاشی درایه‌های قطری را تعیین می‌کند:

$$|\langle ۰|(\rho(t) - \rho_\beta)|۰\rangle| \propto e^{-t/T_۱},$$

که در آن $T_۱$ با $\kappa_\pm$ از رابطه زیر مرتبط است:

$$\frac{۱}{T_۱} = \kappa_+ + \kappa_-.$$

درایه‌های غیرقطری $\rho(t)$ نیز به‌صورت زیر واپاشی می‌کنند:

$$|\langle ۰|\rho(t)|۱\rangle| \propto e^{-t/T_۲},$$

که در این حالت:

$$T_۲ = ۲T_۱.$$

برای مدل‌کردن سایر منابع دیفازینگ، یعنی دیفازینگ سریع و مارکوفی، فراتر از دیفازینگ ناشی از آرامش، می‌توان یک زمان دیفازینگ خالص T_ϕ معرفی کرد که از رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{۱}{T_۲} = \frac{۱}{۲T_۱} + \frac{۱}{T_\phi}. \tag{۵.۷}$$

در اینجا $T_۲$ را می‌توان زمان دیفازینگ «اندازه‌گیری‌شده تجربی» در نظر گرفت. در معادله لیندبلاد کیوبیت، می‌توان چنین دیفازینگ اضافی را با افزودن جمله دیفازینگ خالص

$$\gamma\mathcal{D}[Z]$$

با

$$\gamma = \frac{۱}{۲T_\phi}$$

مدل کرد. در عمل، زمان‌های اندازه‌گیری‌شده $T_۱$ و $T_۲$ کیوبیت‌های ابررسانا، که $T_۲$ اغلب با و بدون پالس‌های اکو یا جداسازی دینامیکی اندازه‌گیری می‌شود، در زمان نوسان قابل توجهی دارند. این پالس‌ها مؤلفه‌های نویز آهسته‌تغییر را حذف می‌کنند. همچنین این زمان‌ها وقتی یک ترانسمون با شار به فرکانس‌های مختلف تنظیم می‌شود تغییر می‌کنند؛ برای نمونه مرجع [۱۳۰] و مطالعات مربوط به اثر پرتوهای کیهانی [۱۳۱] و مراجع موجود در آن‌ها را ببینید. روشن است که برای ثبت اثرهای غیرتعادلی در مقیاس‌های زمانی مختلف، مدل‌های فیزیکی بسیار دقیق‌تری لازم است [۱۳۲].

تمرین ۱.۱.۷: دیفازینگ و آرامش در معادله لیندبلاد کیوبیت

۱. توجه کنید که:

$$\sigma^- = |۰\rangle\langle ۱| = \frac{۱}{۲}(X + iY).$$

مقدار

$$\frac{d}{dt}\left(\operatorname{Tr}\sigma^-\rho(t)\right) = \operatorname{Tr}\sigma^-\dot{\rho}(t)$$

را تعیین کنید؛ در حالی که $\rho(t)$ جواب معادله لیندبلاد در رابطه (۴.۷) است. سپس $\operatorname{Tr}\sigma^-\rho(t)$ را با شرایط اولیه

$$\operatorname{Tr}X\rho(t=۰) = ۱, \qquad \operatorname{Tr}Y\rho(t=۰) = ۰$$

حل کنید؛ یعنی:

$$\rho(t=۰) = |+\rangle\langle +|.$$

بررسی کنید که:

$$\frac{۲}{T_۲} = \kappa_+ + \kappa_-.$$

۲. جمله دیفازینگ اضافی

$$\gamma\mathcal{D}[Z]$$

را در معادله لیندبلاد وارد کنید و با بررسی دوباره

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{Tr}\,\sigma^-\rho(t)\right)$$

تأیید کنید که T_ϕ چگونه به γ مربوط می‌شود.

۳. مقدار

$$\mathrm{Tr}\,|۰\rangle\langle۰|\rho(t)$$

را نیز حل کنید و تأیید کنید که:

$$T_۲ = ۲T_۱.$$

پاسخ تمرین ۱.۱.۷

۱. داریم:

$$\mathrm{Tr}\,X\dot{\rho}(t) = \frac{i\Omega}{۲}\mathrm{Tr}\,X[Z,\rho(t)] - \frac{۱}{۲}(\kappa_- + \kappa_+)\mathrm{Tr}\,X\rho(t) = \Omega\,\mathrm{Tr}\,Y\rho(t) - \frac{۱}{۲}(\kappa_- + \kappa_+)\mathrm{Tr}\,X\rho(t),$$

و

$$\mathrm{Tr}\,Y\dot{\rho}(t) = \frac{i\Omega}{۲}\mathrm{Tr}\,Y[Z,\rho(t)] - \frac{۱}{۲}(\kappa_- + \kappa_+)\mathrm{Tr}\,Y\rho(t) = -\Omega\,\mathrm{Tr}\,X\rho(t) - \frac{۱}{۲}(\kappa_- + \kappa_+)\mathrm{Tr}\,Y\rho(t).$$

یا به‌طور معادل:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{Tr}\,\sigma^-\rho(t)\right) = \left(-i\Omega - \frac{۱}{۲}(\kappa_- + \kappa_+)\right)\mathrm{Tr}\,\sigma^-\rho(t).$$

پس با شرط اولیه داده‌شده، جواب برابر است با:

$$\mathrm{Tr}\,\sigma^-\rho(t) = \frac{۱}{۲}e^{-i\Omega t - (\kappa_+ + \kappa_-)t/۲},$$

که واپاشی نمایی با

$$T_۲ = \frac{۲}{\kappa_+ + \kappa_-}$$

را نشان می‌دهد.

۲. داریم:

$$\mathcal{D}[Z](\rho(t)) = Z\rho Z - \rho.$$

بنابراین:

$$\gamma\,\mathrm{Tr}\,X\mathcal{D}[Z](\rho) = -۲\gamma\,\mathrm{Tr}\,X\rho(t),$$

و به‌طور مشابه:

$$\gamma\,\mathrm{Tr}\,Y\mathcal{D}[Z](\rho) = -۲\gamma\,\mathrm{Tr}\,Y\rho(t).$$

این یک واپاشی اضافی

$$e^{-۲\gamma t} = e^{-t/T_\phi}$$

می‌دهد، پس:

$$T_\phi = \frac{۱}{۲\gamma}.$$

۳. داریم:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{Tr}\,|۰\rangle\langle۰|\rho(t)\right) = \kappa_-\mathrm{Tr}\,|۱\rangle\langle۱|\rho(t) - \kappa_+\mathrm{Tr}\,|۰\rangle\langle۰|\rho(t).$$

پس:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{Tr}\,|۰\rangle\langle۰|\rho(t)\right) = \kappa_- - (\kappa_+ + \kappa_-)\mathrm{Tr}\,|۰\rangle\langle۰|\rho(t),$$

و در نتیجه:

$$\mathrm{Tr}\,|۰\rangle\langle۰|\rho(t) = Ce^{-(\kappa_+ + \kappa_-)t} + \frac{\kappa_-}{\kappa_+ + \kappa_-},$$

برای یک ثابت C. این تأیید می‌کند که:

$$\frac{۱}{T_۱} = \kappa_+ + \kappa_-.$$

همچنین:

$$\mathrm{Tr}\,|۰\rangle\langle۰|\rho_\beta = \frac{\kappa_-}{\kappa_+ + \kappa_-}.$$

تمرین ۲.۱.۷: تعادل گرمایی؟

۱. یک کیوبیت ترانسمون با فرکانس

$$f = \Omega/۲\pi = ۵\ \mathrm{GHz}$$

را تنها می‌گذاریم و تصور می‌کنیم که با دمای یخچال رقیق‌ساز، که برابر

$$۲۰\ \mathrm{mK}$$

نگه داشته شده است، به تعادل می‌رسد. پس از تعادل، احتمال یافتن کیوبیت ترانسمون در حالت $\langle۰|$ چقدر است؟ تحلیل را هم با در نظر گرفتن ترانسمون به‌عنوان یک کیوبیت و هم به‌عنوان یک سیستم کاملاً هارمونیک انجام دهید. تفاوت جواب‌ها چیست؟ می‌توانید از این تقریب استفاده کنید:

$$۵۰\ \mathrm{mK} \approx ۱\ \mathrm{GHz}.$$

وقتی پاسخ‌های خود را با احتمال تجربی تخمین‌زده‌شده برای یافتن ترانسمون در حالت $\langle۰|$ مقایسه می‌کنید، برای نمونه شکل ۱ در مرجع [۱۳۳] را ببینید که در آن اشغال حالت پایه حدود ۸۰٪ تخمین زده شده است، متوجه می‌شوید که این مدل گرمایی بسیار ساده بیش از حد ساده‌سازی شده است: منابع نویز دیگری وجود دارند که باعث می‌شوند کیوبیت در حالت $\langle۰|$ اندازه‌گیری نشود.

۲. همین پرسش را برای یک کیوبیت فلاکسونیوم در نظر بگیرید، با این تفاوت که آن را به‌عنوان یک کیوبیت با فرکانس

$$f = \Omega/۲\pi = ۳۰۰\ \mathrm{MHz}$$

مدل کنید. این نتیجه درباره مقداردهی اولیه کیوبیت فلاکسونیوم چه چیزی به شما می‌گوید؟

پاسخ تمرین ۲.۱.۷

۱. فرض می‌کنیم کیوبیت به حالت گیبس زیر متعادل می‌شود:

$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{\mathrm{Tr}(e^{-\beta H})}, \qquad \beta = \frac{۱}{k_B T}.$$

اگر ترانسمون را به‌عنوان یک کیوبیت در نظر بگیریم، داریم:

$$H = -\frac{\hbar\Omega}{۲}Z, \qquad \hbar\Omega = hf.$$

بنابراین:

$$\mathbb{P}(۰) = \langle ۰|\rho|۰\rangle = \frac{۱}{۱ + e^{-\beta\hbar\Omega}} = \frac{۱}{۱ + e^{-۵/(۴/۵)}} \approx ۰{,}۹۹۸.$$

اگر ترانسمون را به‌عنوان یک سیستم هارمونیک با

$$H = \hbar\Omega\left(\hat{n} + \frac{۱}{۲}\right)$$

در نظر بگیریم، داریم:

$$\mathbb{P}(۰) = ۱ - e^{-\beta\hbar\Omega} = ۱ - e^{-۵/(۴/۵)} \approx ۰{,}۹۹۸,$$

که با همین دقت، با جواب قبلی یکسان است.

۲. برای کیوبیت فلاکسونیوم:

$$\mathbb{P}(۰) = \langle ۰|\rho|۰\rangle = \frac{۱}{۱ + e^{-(۳/۱۰)/(۴/۵)}} = \frac{۱}{۱ + e^{-۳/۸}} \approx ۰{,}۵۹۳.$$

به دلیل فرکانس پایین فلاکسونیوم، این کیوبیت باید به‌صورت فعال اندازه‌گیری، یا ریست، شود تا در حالت $\langle ۰|$ مقداردهی اولیه گردد؛ زیرا جمعیت گرمایی در حالت $\langle ۱|$ نسبتاً زیاد است.

۷-۲ یک مدار کیوبیتی با شاخه‌ی مداری اتلاف‌دار

تصور می‌کنیم که در یکی از مدارهای کیوبیتی‌ای که در این کتاب درباره آن‌ها بحث کرده‌ایم، یک عنصر اتلافی نیز وجود دارد. این عنصر را می‌توان به‌صورت یک شاخه مداری اضافی میان گره‌های کیوبیت توصیف کرد که ادمیتانس آن برابر است با:

$$\mathcal{Y}(\omega) = \frac{۱}{\mathcal{Z}(\omega)}.$$

از آنجا که این شاخه اتلافی است، $\mathcal{Y}$ و $\mathcal{Z}$ بخش‌های حقیقیِ ناصفر خواهند داشت؛ همان‌طور که در بحث تک‌پورتی بخش ۵-۳ دیدیم. این شاخه ممکن است صرفاً یک مقاومت ساده R باشد، اما می‌تواند از چندین عنصر مداری نیز تشکیل شده باشد. خود را به حالتی محدود می‌کنیم که در آن $\mathrm{Re}(\mathcal{Y})$ کوچک است، یعنی $\mathcal{Z}$، یا R، بزرگ است. این فرض منطقی است، زیرا تنها در حالتی تلاش می‌کنیم یک کیوبیت بسازیم که اتلاف کوچک باشد؛ بنابراین شاخه اتلافی فقط یک اختلال کوچک روی مدار خواهد بود.

پس سناریویی مانند شکل ۷-۱ را در نظر می‌گیریم که در آن یک نوسانگر LC، یا هر نوع کیوبیت دیگر مانند ترانسمون یا کیوبیت شار، به‌صورت ضعیف و خازنی به چنین عنصر مقاومتی کوپل شده است. این عنصر مقاومتی از نظر فیزیکی می‌تواند یک خط انتقالِ مشاهده‌نشده نیز باشد.

مشاهده می‌کنیم که تحلیل فاستر اتلافی در بخش ۵-۳، که در آن هر نوسانگر LC یک مقاومت موازی دارد، با چیدمان شکل ۷-۱ چندان خوب سازگار نیست. ادعای مدار فاستر اتلافی این است که می‌توان هر $Z(s)$، برای مثال $Z(s)$ موازی با نوسانگر LC در شکل ۷-۱، را به‌صورت مجموعه‌ای سری از مدارهای RLC نوشت؛ شکل ؟؟ را برای $N = ۱$ ببینید. با این حال، در این حالت این نمایش تا حدی تکین است، زیرا برخی خازن‌ها و القاگرها را از دست می‌دهیم. رویکرد مستقیم‌تری که در پیوست ۱۰-۴ برای یک نوسانگر LC موازی با یک ادمیتانس دلخواه اما کوچک توضیح داده شده، مناسب‌تر است.

رویکرد فیزیکی برای مدل‌کردن ناهمدوسی کیوبیت این است که عنصر مقاومتی را به‌عنوان یک حمام پیوسته از نوسانگرها، با یک چگالی طیفی مشخص، در یک حالت گرمایی با دمای معین در نظر بگیریم و هامیلتونی سیستم–حمام را بررسی کنیم. این همان مدل موسوم به کالدیرا–لگت است که در اصل در مرجع [۱۳۴] مطالعه شده است؛ برای کاربرد آن در مدارهای الکتریکی، همچنین مراجع [۴، ۱۳۵] را ببینید. سپس می‌توان روی چنین سیستم کامل شامل سیستم، حمام و هامیلتونی حمام، تحلیل بورن–مارکوف [۷۰] اعمال کرد و از طریق آن، یک معادله مستر لیندبلاد فقط برای سیستم کیوبیتی به‌دست آورد؛ در این تحلیل، حمام به‌عنوان محیطی بزرگ، مختل‌نشده و با کوپلینگ ضعیف در نظر گرفته می‌شود. جمله‌های اتلافی در این معادله مستر لیندبلاد، که کیوبیت را به سمت حالت گرمایی می‌برند، زمان آرامش $T_۱$ را مانند رابطه (۴.۷) تعیین می‌کنند.

برای مثال، بدون ورود به استخراج کامل، نتیجه‌ای را از مرجع [۴۹]، پیوست ۳، نقل می‌کنیم؛ استخراج آن را همچنین می‌توان در رابطه (۱۳۱) از مرجع [۵] و بخش ۳ از مرجع [۱۳۶] دید. نرخ واپاشی برابر است با:

$$T_۱^{-۱} = \frac{۱}{\hbar}\left|\langle ۰|\hat{\phi}_i - \hat{\phi}_j|۱\rangle\right|^۲ \left(\frac{\Phi_۰}{۲\pi}\right)^۲ \Omega\, \mathrm{Re}(\mathcal{Y}(\Omega)) \left[\coth\left(\frac{\beta\hbar\Omega}{۲}\right) + ۱\right], \qquad (۶.۷)$$

که در آن $\hbar\Omega$ شکاف انرژی میان حالت‌های $\langle ۰|$ و $\langle ۱|$ کیوبیت است. گره‌های i و j همان گره‌هایی هستند که امپدانس اتلافی، با ادمیتانس $\mathcal{Y}(\omega)$، به‌صورت یک شاخه میان آن‌ها متصل شده است. توجه کنید که:

$$\coth\left(\frac{\beta\hbar\Omega}{۲}\right) = ۱ + ۲\bar{n}(\Omega),$$

که در آن $\bar{n}(\Omega)$ عدد اشغال گرمایی مانند رابطه (۳.۷) است. در این رابطه، عملگرهای شار گره‌ایِ بدون‌بُعد برای گره‌های i و j ظاهر می‌شوند. اگر یک گره زمین شده باشد، عملگر متناظر با آن به‌سادگی حذف می‌شود.

رابطه (۶.۷) حتی زمانی نیز برقرار است که چند مدار کیوبیتی به‌صورت سری میان این گره‌ها ϕ_i و ϕ_j قرار داده شده باشند؛ حتی اگر توابع موج کیوبیت تا حد زیادی مستقل از ϕ_i و ϕ_j باشند. اما مفید است که کاربرد این رابطه را برای ساده‌ترین مثال، یعنی یک مدار LC منفرد که با یک مقاومت R شنت شده است، بررسی کنیم. محاسبه درایه ماتریسی با استفاده از روابط (۲-۲۸) و(؟؟) انجام می‌شود و نتیجه می‌دهد:

$$\langle ۰|\hat{\phi}|۱\rangle = \frac{۲\pi}{\Phi_۰}\sqrt{\frac{\hbar}{۲}\sqrt{\frac{L}{C}}}. \qquad (۷.۷)$$

با جایگذاری این نتیجه در رابطه (۶.۷)، و با جایگزینی‌های

$$\Omega \mapsto \omega_r = \frac{۱}{\sqrt{LC}}, \qquad \mathrm{Re}(\mathcal{Y}(\omega_r)) = \frac{۱}{R},$$

و در حد دمای پایین، یعنی

$$\coth(\cdot) + ۱ \to ۲,$$

نتیجه ساده زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$T_۱^{-۱} = \frac{۱}{RC}. \qquad (۸.۷)$$

این شناسایی مستقیم $T_۱$ با «واپاشی RC» در مرجع [۱۳۷] بیشتر بحث شده است. در پیوست ۱۰-۴ نشان می‌دهیم که این شناسایی به‌طور کلی‌تر برای مدارهای LC موازی با یک ادمیتانس اختلالیِ ضعیف نیز برقرار است؛ رابطه (B.۶۰) را ببینید.

روشنگر است که ثابت‌ها را در رابطه (۶.۷) به‌شکلی متفاوت جمع کنیم تا آن رابطه به‌صورت زیر بازنویسی شود:

$$T_۱^{-۱} = \left|\langle ۰|\hat{\phi}_i - \hat{\phi}_j|۱\rangle\right|^۲ \frac{\Omega}{۲\pi} R_Q \mathrm{Re}(\mathcal{Y}(\Omega)) \left[\coth\left(\frac{\beta\hbar\Omega}{۲}\right) + ۱\right]. \qquad (۹.۷)$$

در اینجا R_Q کوانتوم مقاومت در رابطه(۳-۲) است. این بازنویسی واحدهای عبارت را بسیار شفاف می‌کند و روشن می‌سازد که یکی از جنبه‌های «کوچک» بودن T_1^{-1} این است که:

$$\mathrm{Re}\,\mathcal{Y}(\Omega) \ll R_Q^{-1}.$$

تمرین ۱.۲.۷: آرامش کیوبیت ناشی از یک خط انتقال بلند

در شکل ۲-۱۲ یک مدار تشدیدی ساده را نشان دادیم که توسط یک منبع ولتاژ تحریک می‌شود. وضعیت واقعی معمولاً بیشتر شبیه چیزی است که در شکل ۷-۱(a) نشان داده شده است. منبع ولتاژ در واقع بسیار دورتر قرار دارد و از طریق طول زیادی از خط انتقال به آزمایش متصل می‌شود؛ شکل ۵-۳ را مقایسه کنید. همان‌طور که از نظریه مدارهای تشدیدی معلوم است، یک خط انتقال بی‌نهایت با امپدانس موجی Z_0 همان اثری را دارد که یک مقاومت واقعی با همان مقاومت Z_0 دارد؛ برای نمونه مرجع [۷۴] را ببینید.

البته خط انتقال واقعاً بی‌نهایت نیست، اما در عمل، پس از حدود یک متر خط انتقال، فیلتری با مقاومتی برابر با Z_0 در آن قرار دارد. بنابراین وضعیت به‌خوبی با شکل ۷-۱(b) نمایش داده می‌شود. مقاومت واقعی هنوز در سردترین بخش کریوستات قرار دارد؛ بنابراین می‌توانیم دما را برابر

$$T = ۲۰\ \mathrm{mK}$$

در نظر بگیریم. بسیاری از جنبه‌های این مسئله شبیه تحلیل ارائه‌شده در مرجع [۱۳۸] هستند، که یک آزمایش نیز در آن ارائه شده است.

با استفاده از دمای داده‌شده و پارامترهای زیر:

$$Z_0 = ۵۰\Omega, \qquad E_C/h = ۲۵۰\ \mathrm{MHz}$$

رابطه (۲-۲۱)،

$$E_L/h = ۱۲{,}۵\ \mathrm{GHz}$$

رابطه (۲-۲۲)، و

$$C_g/C = ۰{,}۰۰۵$$

که با توجه به مرجع [۱۳۹] معقول است، مقدار T_1 را محاسبه کنید و آن را با دوره نوسان تشدیدگر مقایسه کنید. ترکیب سری RC در سمت چپ شکل ۷-۱(b) را به‌عنوان یک شاخه مرکب منفرد در نظر بگیرید.

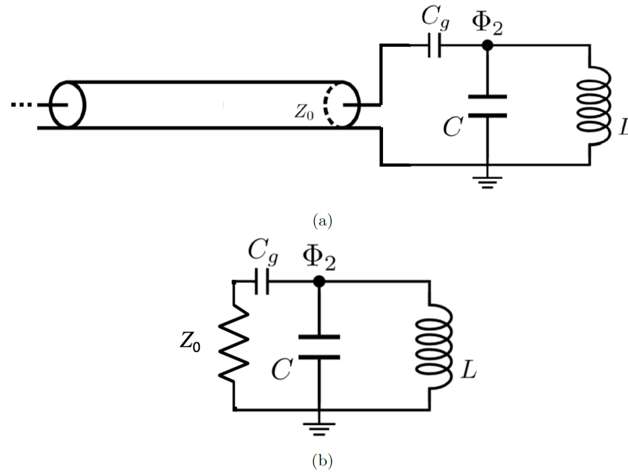
پاسخ تمرین ۱.۲.۷

توجه کنید که:

$$\omega_r = \frac{۱}{\sqrt{LC}}.$$

کمیت‌های مرتبط با شاخه اتلافی ما عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}(\omega_r) &= Z_0 + \frac{۱}{i\omega_r C_g},\\
\mathcal{Y}(\omega_r) &= \frac{i\omega_r C_g}{۱ + i\omega_r C_g Z_0},\\
\mathrm{Re}(\mathcal{Y}(\omega_r)) &= \frac{\omega_r^۲ C_g^۲ Z_0}{۱ + \omega_r^۲ C_g^۲ Z_0^۲},\\
\mathrm{Re}(\mathcal{Y}(\omega_r)) &= \frac{C_g^۲ Z_0/CL}{۱ + C_g^۲ Z_0^۲/CL}.
\end{aligned} \qquad (۷.۱۰)$$



شکل ۷-۱: یک خط انتقال مشاهده‌نشده، یعنی خطی که تحریک نمی‌شود، با امپدانس مشخصه $Z_۰$ در بخش (a)، می‌تواند با یک مقاومت با مقدار $Z_۰$ در بخش (b) جایگزین شود.

توجه کنید که عامل موجود در مخرج رابطه آخر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{Z_۰^۲ C_g^۲}{LC} = Z_۰^۲ \frac{C}{L}\left(\frac{C_g}{C}\right)^۲ = \frac{(۲\pi)^۲}{۸}\left(\frac{Z_۰}{R_Q}\right)^۲\left(\frac{C_g}{C}\right)^۲ \frac{E_L}{E_C} \ll ۱. \qquad (۱۱.۷)$$

این رابطه حتی با وجود

$$E_L > E_C$$

برقرار است، زیرا سایر عوامل بسیار کوچک‌اند. بنابراین، با توجه به مقدار دما نیز، می‌توانیم تقریب بزنیم:

$$\mathrm{Re}(\mathcal{Y}(\omega_r)) \approx \frac{C_g^۲ Z_۰}{CL} = \frac{(۲\pi)^۲}{۸}\frac{۱}{R_Q}\frac{Z_۰}{R_Q}\left(\frac{C_g}{C}\right)^۲ \frac{E_L}{E_C}, \qquad \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega_r}{۲}\right) \approx ۱. \qquad (۱۲.۷)$$

برای محاسبه درایه ماتریسی، از نتیجه نوسانگر هارمونیک در رابطه (؟؟)استفاده می‌کنیم، به‌طوری‌که:

$$\left|\langle ۰|\hat{\phi}_۲|۱\rangle\right|^۲ = \sqrt{\frac{۲E_C}{E_L}}. \qquad (۱۳.۷)$$

با جمع‌کردن همه چیز، و با استفاده از رابطه (۹.۷)، داریم:

$$\begin{aligned} T_۱^{-۱} &= \sqrt{\frac{۲E_C}{E_L}} \cdot \frac{\omega_r}{۲\pi} \cdot R_Q \cdot \frac{(۲\pi)^۲}{۸}\frac{۱}{R_Q}\frac{Z_۰}{R_Q}\left(\frac{C_g}{C}\right)^۲ \frac{E_L}{E_C} \cdot ۲ \\ &= \frac{(۲\pi)^۲}{۲\sqrt{۲}}\sqrt{\frac{E_L}{E_C}}\frac{Z_۰}{R_Q}\left(\frac{C_g}{C}\right)^۲ \frac{\omega_r}{۲\pi} \\ &= ۰{,}۰۰۰۱۹۰۶\,\mathrm{GHz} \approx ۱{,}۱\,\mathrm{MHz}. \end{aligned} \qquad (۱۴.۷)$$

این مقدار، نرخ واپاشی معقولی در حدود

$$۱\,\mu\mathrm{s}$$

به‌دست می‌دهد، هرچند در حد بهترین فناوری‌های روز نیست. طول‌عمرهای بیشتر با استفاده از مقدارهای کوچک‌تر برای ظرفیت کوپلینگ C_g و گاهی با استفاده از «فیلتر پورسل»، یا Purcell filter، به‌دست می‌آیند؛ فیلتری که $\mathrm{Re}(\mathcal{Y})$ را در فرکانس ω_r به‌شدت کاهش می‌دهد.

۳ـ۷ حساسیت به نویز و حفاظت

فرض کنید می‌خواهیم هامیلتونی ایده‌آل H_{ideal} یک کیوبیت ابررسانای منفرد را با استفاده از عملگرهای مزدوج $\hat{\phi}$ و $\hat{q}$ مهندسی کنیم. در عمل، این سیستم به سیستم‌های دیگر، چه کوانتومی و چه کلاسیکی، کوپل می‌شود؛ سیستم‌هایی که دینامیک آن‌ها روی سیستم اثر می‌گذارد و نویز وارد می‌کند. فرض کنید هامیلتونی شامل کوپلینگ به محیط برابر با $\tilde{H}$ باشد. به‌طور تقریبی می‌توان نویز را یا نویز بار و یا نویز شار طبقه‌بندی کرد؛ یعنی نویز به‌ترتیب یا به متغیر بار $\hat{q}$ یا به متغیر شار $\hat{\phi}$ در $\tilde{H}$ کوپل می‌شود.

هم نویز شار و هم نویز بار می‌توانند هم در دیفازینگ کیوبیت و هم در آرامش کیوبیت نقش داشته باشند. این‌که کدام نویز غالب است، به قدرت کوپلینگ‌ها و همچنین به ویژگی و تقارن حالت‌های کیوبیت بستگی دارد. یک مدل ساده برای نرخ $۱/T_۱$ با قاعده طلایی فرمی داده می‌شود که می‌گوید:

$$\frac{۱}{T_۱} = \frac{۲\pi}{\hbar}\left|\langle ۰|\tilde{H}|۱\rangle\right|^۲ \rho(\Omega), \tag{۱۵.۷}$$

که در آن $\rho(\Omega)$ چگالی حالت‌های درجات آزادی محیطی در فرکانس کیوبیت Ω است. می‌توان این عبارت را با رابطه (۶.۷) مقایسه کرد؛ جایی که کوپلینگ بر حسب عملگر شار شاخه، ادمیتانس $\mathcal{Y}(\Omega)$ و خواص گرمایی محیط در فرکانس Ω بیان می‌شود. روشن است که این‌که نویز شار و نویز بار از طریق رابطه (۱۵.۷) در آرامش نقش داشته باشند یا نه، به این بستگی دارد که آیا جمله‌هایی در $\tilde{H}$ که شامل عملگر بار $\hat{q}$ و/یا عملگر شار $\hat{\phi}$ هستند، گذارهایی میان $\langle ۰|$ و $\langle ۱|$ ایجاد می‌کنند یا نه.

حساسیت به نویز

همان‌طور که می‌دانیم، کیوبیت ترانسمون به‌گونه‌ای طراحی شده است که نسبت به نویز بار حساسیت کمتری داشته باشد. این موضوع در نمودارهای شکل ؟؟ نشان داده شده است؛ جایی که کاهش حساسیت نسبت به نویز در بار آفست n_g برای انرژی‌های همه حالت‌های ویژه $|\psi_k\rangle$ دیده می‌شود. فرض کنید $\tilde{H}$ هامیلتونی‌ای باشد که وقتی بار آفست n_g اندکی با مقدار ایده‌آل n_g^{ideal} فرق دارد به‌دست می‌آید؛ یعنی:

$$\tilde{H}(n_g = n_g^{\text{ideal}}) = H_{\text{ideal}}.$$

در نتیجه، بی‌حساسیتی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\langle\psi_m|\tilde{H}|\psi_m\rangle \approx \langle\psi_m|H_{\text{ideal}}|\psi_m\rangle, \tag{۱۶.۷}$$

که در آن $|\psi_m\rangle$ حالت‌های ویژه H_{ideal} هستند. برای ترانسمون، این ویژگی به دلیل وابستگی ضعیف $E_m(n_g)$ به n_g در رابطه (۴-۳۳)، برای

$$E_J/E_C \gg ۱$$

رخ می‌دهد.

این بی‌حساسیتی، زمان دیفازینگ کیوبیت را طولانی‌تر می‌کند؛ یعنی قدرت خطای Z ناشی از نویز بار را محدود می‌کند، زیرا نتیجه می‌دهد:

$$\langle ۰|\tilde{H}|۰\rangle - \langle ۱|\tilde{H}|۱\rangle \approx \langle ۰|H_{\text{ideal}}|۰\rangle - \langle ۱|H_{\text{ideal}}|۱\rangle. \tag{۱۷.۷}$$

اگر یک کیوبیت نسبت به خطاهای دیفازینگ بی‌حساس باشد، انتظار داریم زمان دیفازینگ $T_۲$ طولانی باشد و عمدتاً توسط دیفازینگ ناشی از آرامش محدود شود؛ یعنی:

$$\frac{۱}{T_۲} \gtrsim \frac{۱}{۲T_۱}.$$

توجه کنید که پرسش متفاوتی این است که آیا درایه ماتریسی

$$\left|\langle ۰|\tilde{H}|۱\rangle\right|$$

کوچک است یا نه. طبق تعریف داریم:

$$|\langle ۰|H_{\text{ideal}}|۱\rangle| = ۰,$$

زیرا $\langle ۰|$ و $\langle ۱|$ حالت‌های ویژه ایده‌آل هستند. بنابراین اثر اختلالِ زمان‌وابسته و تصادفی در $\tilde{H}$ را بررسی می‌کنیم؛ اختلالی که کیوبیت را به محیط کوپل می‌کند. صرفاً از این واقعیت که ترانسمون در رژیم

$$E_C \ll E_J$$

قرار دارد و هر نویز بار با مقیاس انرژی E_C وارد می‌شود، نتیجه می‌گیریم که نویز بارِ ایجادکننده گذار میان $\langle ۰|$ و $\langle ۱|$، یعنی خطاهای بیت‌فلیپ X، سرکوب می‌شود. به همین دلایل کلی، یک کیوبیت از نوع شار، که در آن سهم‌های جمله‌های خازنیِ مقیاس‌شونده با E_C نسبتاً کوچک‌اند، به‌طور طبیعی در برابر نویز بار محافظت می‌شود.

۷-۳-۱ نقاط شیرین شار

هر حلقه‌ای در نمایش مدار ابررسانای عناصر فشرده که جریان بتواند از آن عبور کند، تحت تأثیر میدان‌های مغناطیسی سرگردان و نوسانی قرار می‌گیرد و می‌تواند به نویز شار منجر شود.

یک شکل رایج از حفاظت در برابر نویز شار کلاسیکی زمانی به‌دست می‌آید که هامیلتونی ایده‌آل H_{ideal} در نقطه‌ای موسوم به نقطه شیرین شار خارجی، یا external flux sweet spot، کار کند. فرض کنید پتانسیل $U(\phi, \phi_{\text{ext}})$ را روی نقطه $\phi_{\text{ext}} = \phi_{\text{ext}}^{\text{ideal}}$ تنظیم کنیم. اگر مقدار نویز روی شار خارجی ϕ_{ext} به‌اندازه کافی کوچک باشد، آنگاه می‌توانیم بنویسیم:

$$\tilde{H}(\phi_{\text{ext}}) = H_{\text{ideal}} + (\phi_{\text{ext}} - \phi_{\text{ext}}^{\text{ideal}}) \left.\frac{\partial U}{\partial \phi_{\text{ext}}}\right|_{\phi_{\text{ext}}^{\text{ideal}}} + \frac{۱}{۲}(\phi_{\text{ext}} - \phi_{\text{ext}}^{\text{ideal}})^{۲} \left.\frac{\partial^{۲} U}{\partial \phi_{\text{ext}}^{۲}}\right|_{\phi_{\text{ext}}^{\text{ideal}}} + \cdots .$$

اکنون می‌توانیم بررسی کنیم که نوسان‌های ϕ_{ext} چگونه بر فرکانس کیوبیت اثر می‌گذارند؛ یعنی:

$$\langle ۰|\tilde{H}(\phi_{\text{ext}})|۰\rangle - \langle ۱|\tilde{H}(\phi_{\text{ext}})|۱\rangle = \hbar\Omega^{\text{ideal}}$$
$$+(\phi_{\text{ext}} - \phi_{\text{ext}}^{\text{ideal}}) \left(\left\langle ۰ \left| \left.\frac{\partial U}{\partial \phi_{\text{ext}}}\right|_{\phi_{\text{ext}}^{\text{ideal}}} \right| ۰ \right\rangle - \left\langle ۱ \left| \left.\frac{\partial U}{\partial \phi_{\text{ext}}}\right|_{\phi_{\text{ext}}^{\text{ideal}}} \right| ۱ \right\rangle\right) + O\big((\phi_{\text{ext}} - \phi_{\text{ext}}^{\text{ideal}})^{۲}\big),$$

که در آن Ω^{ideal} فرکانس گذار هدف است. می‌گوییم $\phi_{\text{ext}}^{\text{ideal}}$ یک نقطه شیرین شار است، وقتی:

$$\left\langle ۰ \left| \left.\frac{\partial U}{\partial \phi_{\text{ext}}}\right|_{\phi_{\text{ext}}^{\text{ideal}}} \right| ۰ \right\rangle - \left\langle ۱ \left| \left.\frac{\partial U}{\partial \phi_{\text{ext}}}\right|_{\phi_{\text{ext}}^{\text{ideal}}} \right| ۱ \right\rangle = ۰. \qquad (۱۸.۷)$$

یک حالت رایج زمانی است که U به

$$\cos(\phi - \phi_{\text{ext}}^{\text{ideal}})$$

وابسته باشد، با

$$\phi_{\text{ext}}^{\text{ideal}} = k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

به‌گونه‌ای که برای هر حالت ویژه $\langle\psi|$، به دلیل تقارن زوجیت هامیلتونی ایده‌آل، داشته باشیم:

$$\left\langle \psi \left| \left.\frac{\partial U}{\partial \phi_{\text{ext}}}\right|_{\phi_{\text{ext}}^{\text{ideal}}} \right| \psi \right\rangle \propto \langle\psi|\sin(\phi)|\psi\rangle = ۰.$$

این موضوع در بخش ۳-۴ بحث شد. بنابراین، نقاط

$$\phi_{\text{ext}}^{\text{ideal}} = k\pi$$

نقاط شیرین شار هستند؛ جاهایی که انتظار داریم طولانی‌ترین زمان $T_۲$ را داشته باشیم.

تمرین ۱.۳.۷

نشان دهید نوسان‌های کوچک در ϕ_{ext} در یک نقطه شیرین شار، که رابطه (۱۸.۷) در آن برقرار است، همچنان می‌توانند خطاهای بیت‌فلیپ (X) ایجاد کنند و بنابراین $T_۱$ را کاهش دهند؛ یعنی:

$$\left|\langle ۰|\tilde{H}(\phi_{\text{ext}})|۱\rangle\right|, \tag{۱۹.۷}$$

لزوماً کوچک نیست، وقتی U در $\phi_{\text{ext}}^{\text{ideal}}$ نسبت به زوجیت متقارن باشد:

$$U(\phi, \phi_{\text{ext}} = \phi_{\text{ext}}^{\text{ideal}}) = U(-\phi, \phi_{\text{ext}} = \phi_{\text{ext}}^{\text{ideal}}),$$

و در عین حال بخواهیم بتوانیم گذار ۱ — ۰ کیوبیت را تحریک کنیم.

پاسخ تمرین ۱.۳.۷

تا مرتبه اول داریم:

$$\left|\langle ۰|\tilde{H}(\phi_{\text{ext}})|۱\rangle\right| = (\phi_{\text{ext}} - \phi_{\text{ext}}^{\text{ideal}}) \left|\left\langle ۰ \left| \frac{\partial U}{\partial \phi_{\text{ext}}}\right|_{\phi_{\text{ext}}^{\text{ideal}}} \right| ۱ \right\rangle\right|. \tag{۲۰.۷}$$

از آنجا که H_{ideal} نسبت به زوجیت متقارن است،

$$\frac{\partial U}{\partial \phi_{\text{ext}}}$$

یک تابع فرد است:

$$f_{\text{odd}}(-\phi) = -f_{\text{odd}}(\phi).$$

حالت‌های $\langle ۰|$ و $\langle ۱|$ باید تقارن زوجیت متفاوتی داشته باشند تا بتوان کیوبیت را تحریک کرد؛ به دلیل روابط (۳-۶۵) و (۳-۶۶). بنابراین هیچ دلیل تقارنی یا دلیل مربوط به نقطه شیرین وجود ندارد که باعث شود رابطه (۱۹.۷) کوچک باشد.

۷-۳-۲ حفاظت ذاتی

در اینجا شکل‌هایی از حفاظت در برابر نویز را بررسی می‌کنیم که بر پایه شکل‌دهی فرم تابع موج هستند؛ مشابه آنچه در یک کد تصحیح خطای کوانتومی انجام می‌شود. برای دیدگاهی کلی درباره کیوبیت‌های محافظت‌شده، خواننده را به مرجع [۱۴۰] ارجاع می‌دهیم.

به‌طور کلی می‌توان نوشت:

$$\tilde{H} = H_{\text{ideal}} + f(\hat{\phi}) + g(\hat{q}),$$

که در آن $f(\cdot)$ و $g(\cdot)$ توابعی هستند که می‌توانند به درجات آزادی اضافیِ کوانتومی یا کلاسیکیِ محیط نیز وابسته باشند، یا زمان‌وابسته باشند. برای هدف استدلال‌های بعدی، شکل دقیق این وابستگی مهم نیست؛ بنابراین آن را دقیقاً مشخص نمی‌کنیم.

فرض کنید یک کیوبیت را با تابع‌های موج $\psi_۰(\phi)$ و $\psi_۱(\phi)$ برای حالت‌های $\langle ۰|$ و $\langle ۱|$ تعریف کنیم؛ این حالت‌ها، حالت‌های ویژه H_{ideal} هستند. اگر تابع‌های موج $\psi_۰(\phi)$ و $\psi_۱(\phi)$ تقریباً تکیه‌گاه‌های جدا از هم داشته باشند، آنگاه:

$$\langle ۰|f(\hat{\phi})|۱\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi\, \psi_۰^*(\phi) f(\phi) \psi_۱(\phi) \approx ۰. \tag{۲۱.۷}$$

به‌طور مشابه، برای تابع
$$g(\hat{q}) = \hat{q}^k$$
با هر k متناهی داریم:

$$\langle ۰|g(\hat{q})|۱\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi\, \psi_۰^*(\phi) \left(-i\frac{\partial}{\partial\phi}\right)^k \psi_۱(\phi) \approx ۰. \tag{۲۲.۷}$$

با این حال، توجه کنید که اگر
$$g(\hat{q}) = e^{i\epsilon\hat{q}},$$
یعنی یک جابه‌جایی با اندازه کافی بزرگ ϵ، آنگاه تکیه‌گاه $\psi_۰(\phi)$ می‌تواند به تکیه‌گاه $\psi_۱(\phi)$ منتقل شود و در نتیجه:

$$\langle ۰|g(\hat{q})|۱\rangle \neq ۰.$$

با این حال، معمولاً انتظار نداریم چنین جمله‌های جابه‌جایی‌ای به‌طور طبیعی در هامیلتونی ظاهر شوند، زیرا $\hat{q}$ عملگر بار را نمایش می‌دهد.

روابط (۲۱.۷) و (۲۲.۷) نشان می‌دهند که هامیلتونی نویزی $\tilde{H}$ نمی‌تواند گذاری از $\langle ۰|$ به $\langle ۱|$ یا برعکس ایجاد کند. بنابراین، کیوبیت در برابر خطاهای بیت‌فلیپ X ناشی از نویز بار یا نویز شار محافظت می‌شود. به بیان دیگر، تبادل انرژی با محیط که گذارهای
$$|۰\rangle \leftrightarrow |۱\rangle$$
را القا می‌کند، سرکوب می‌شود؛ زیرا نمی‌توانیم به این گذارها کوپل شویم. در نتیجه انتظار داریم زمان آرامش کیوبیت $T_۱$ به همین دلیل بسیار طولانی باشد.

نمونه‌ای از کیوبیتی با چنین حفاظت ذاتیِ $T_۱$ کیوبیت $۰ - \pi$ است که در بخش ۳-۳-۵ بررسی شد؛ زیرا تابع‌های موج مربوط به $\langle ۰|$ و $\langle ۱|$ در چاه اطراف $\phi = ۰$ و چاه اطراف $\phi = \pi$ موضعی شده‌اند. روشن است که شرط داشتن تکیه‌گاه‌های جدا از هم ایجاب می‌کند ساختار چاه پتانسیل به‌اندازه کافی پهن باشد. برای کیوبیتی مانند ترانسمون، تابع‌های موج قطعاً تکیه‌گاه‌های جدا از هم ندارند؛ مانند تقریباً دو تابع موج کم‌انرژیِ نوسانگر هارمونیک که شامل توابع هرمیت با اندیس‌های ۰ و ۱ هستند.

۷-۳-۳ حفاظت دوگانه؟

دیدیم که تکیه‌گاه جدا از همِ تابع‌های موج، حفاظتی در برابر خطاهای X ایجاد می‌کند؛ اما آیا ممکن است یک کیوبیت را به همین روش، هم در برابر خطاهای X و هم در برابر خطاهای Z محافظت کرد؟

در نگاه اول، این کار دشوار به نظر می‌رسد؛ زیرا لازم است:

$$\langle +|f(\hat{\phi})|-\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi\, \psi_+^*(\phi) f(\phi) \psi_-(\phi) \overset{?}{\approx} ۰, \tag{۲۳.۷}$$

و همچنین:

$$\langle +|g(\hat{q})|-\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi\, \psi_+^*(\phi) g\left(-i\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \psi_-(\phi) \overset{?}{\approx} ۰, \tag{۲۴.۷}$$

که در آن:

$$\psi_\pm(\phi) \approx \frac{\psi_۰(\phi) \pm \psi_۱(\phi)}{\sqrt{۲}}$$

تابع‌های موج حالت‌های

$$|\pm\rangle = \frac{|۰\rangle \pm |۱\rangle}{\sqrt{۲}}$$

هستند. روشن است که حالت‌های $\psi_\pm(\phi)$ به‌طور کلی تکیه‌گاه‌های جدا از هم ندارند، زیرا برهم‌نهی هستند. با این حال، روابط (۲۳.۷) و (۲۴.۷) هنوز می‌توانند به دلیل دیگری صفر شوند، به شرح زیر.

می‌توان حالت‌های $\langle\pm|$ را با تابع‌های موج $\psi_\pm(q)$ در پایه مزدوج $\hat{q}$ بررسی کرد. در واقع، می‌توان تابع‌های موج $\psi_{0,1}(\phi)$ را به‌گونه‌ای طراحی کرد که تابع‌های موج $\psi_\pm(q)$ نیز تکیه‌گاه‌های غیرهم‌پوشان داشته باشند. این نوع کیوبیت، به نام مخترعان آن، یعنی Gottesman، Kitaev و Preskill در سال ۲۰۰۱، کیوبیت GKP نامیده می‌شود [۱۴۱].

برای کیوبیت GKP، تابع موج $\psi_0(\phi)$ در نقاط زیر به‌شدت قله‌دار است:

$$\phi = 2k\alpha\sqrt{\pi}, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

در حالی که $\psi_1(\phi)$ روی نقاط زیر متمرکز است:

$$\phi = (2k+1)\alpha\sqrt{\pi},$$

برای یک بایاس انتخاب‌شده α. تبدیل فوریه‌ی $\psi_+(q)$ روی نقاط زیر تکیه‌گاه دارد:

$$q = \frac{2k\sqrt{\pi}}{\alpha},$$

در حالی که $\psi_-(q)$ روی نقاط زیر تکیه‌گاه جداگانه دارد:

$$q = \frac{(2k+1)\sqrt{\pi}}{\alpha}.$$

بنابراین فاصله میان تکیه‌گاه‌ها برابر است با:

$$\Delta q = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}.$$

چنین تکیه‌گاه جدا از همی کافی است تا بتوان گفت رابطه (۲۴.۷) برقرار است؛ یعنی خواهیم داشت:

$$\langle +|g(\hat{q})|-\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq\, \tilde{\psi}_+^*(q) g(q) \tilde{\psi}_-(q) \approx 0. \qquad (۲۵.۷)$$

با این حال، حتی با وجود تکیه‌گاه جدا از هم در پایه $\hat{q}$، اگر مثلاً:

$$f(\hat{\phi}) \propto \cos(\hat{\phi}) = \frac{e^{i\hat{\phi}} + e^{-i\hat{\phi}}}{2},$$

آنگاه تکیه‌گاه $\tilde{\psi}_+(q)$ می‌تواند به اندازه ± 1 جابجا شود؛ زیرا:

$$e^{i\hat{\phi}}|q\rangle = |q+1\rangle. \qquad (۲۶.۷)$$

این نتیجه می‌دهد که در حضور یک جمله نویزی اضافی از نوع $\cos\phi$، باید بایاس α را به‌گونه‌ای انتخاب کرد که:

$$\Delta q = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} > 1.$$

با این حال، ساختن پتانسیلی که تابع‌های موج GKP را به‌عنوان حالت پایه داشته باشد، ممکن است خود به جمله‌هایی منجر شود که عملاً مانند $\cos(2\phi)$ و غیره عمل کنند و نوسان‌های بار بزرگ‌تری ایجاد کنند؛ این مسئله به α کوچک نیاز دارد. بنابراین روشن نیست که بتوان این شرط‌ها را با بایاس فشردگی مناسب α هم‌زمان برآورده کرد. آنچه ممکن

است، همچنین به مقیاس‌های انرژی القایی و خازنی بستگی دارد؛ مقیاس‌هایی که در قدرت نسبی بایاس نوسان نقطه صفر q_{zpf} در برابر

$$\phi_{\text{zpf}} = \frac{۱}{۲q_{\text{zpf}}}$$

در رابطه (۲-۳۳) نقش دارند. برای ساخت هامیلتونی‌ای با حالت‌های ویژه تقریبیِ کیوبیت GKP با استفاده از یک ژیراتور، به مرجع [۱۲۶] مراجعه کنید. تحقق فعال، یعنی تحریک‌شده، حالت‌های کیوبیت GKP در یک تشدیدگر کاواک سه‌بعدی ابررسانا، نخستین بار در مرجع [۱۴۲] انجام شد.

به‌طور کلی، توجه می‌کنیم که حفاظت ذاتی یک کیوبیت در برابر نویز، کوپل‌کردن به آن کیوبیت را نیز دشوارتر می‌کند. در حالت ایده‌آل، هامیلتونی باید بتواند از یک رژیم محافظت‌شده به یک رژیم کمتر محافظت‌شده تنظیم شود تا انجام گیت‌ها ممکن شود [۵۳].

هنگام تحقق یک کیوبیت ابررسانای محافظت‌شده در سیستمی با درجات آزادی زیاد، می‌توان پرسید چند درجه آزادی باید درگیر شوند تا گذارهای منطقی

$$|۰\rangle \leftrightarrow |۱\rangle$$

و

$$|+\rangle \leftrightarrow |-\rangle$$

انجام شوند. برای مثال، کیوبیت نوار موبیوس [۵۵]، که بخشی از آن در بخش ۳-۳-۶ بررسی شد، می‌تواند حفاظتی داشته باشد که با N رشد می‌کند؛ زیرا برای انجام برخی گذارهای منطقی، N درجه آزادی درگیر می‌شوند. این دیدگاهِ کد تصحیح خطای کوانتومی در مرجع [۵۷] بیشتر توسعه داده شده است.

فصل ۸

مدل‌هایی از تقویت‌کننده‌های ابررسانا

در این فصل، سه تمرین «مستقل» درباره موضوع تقویت‌کننده‌ها ارائه می‌کنیم. تقویت‌کننده‌هایی که از اجزای QED مداری ساخته می‌شوند، از نظر نویز افزوده می‌توانند به حد کوانتومی نزدیک شوند. این تقویت‌کننده‌ها نقش مهمی در اندازه‌گیری پاشنده‌ی کیوبیت‌ها دارند؛ زیرا سیگنال مایکروویوی که برای اندازه‌گیری استفاده می‌شود، شدت بسیار کمی دارد و پیش از آن‌که بتوان آن را در دمای اتاق به‌صورت یک ولتاژ کلاسیکی خواند، به تقویت کم‌نویز نیاز دارد. برای پیش‌زمینه بیشتر، به مراجع [۱۴۳، ۱۴۴] مراجعه کنید.

۸-۱ تمرین‌هایی درباره‌ی تقویت‌کننده‌ها

تمرین ۸.۱.۱: حد هاوس-کیوز برای یک تقویت‌کننده بوزونی

در این تمرین، حد به‌اصطلاح کوانتومیِ یک تقویت‌کننده بوزونی خطی و نامساس به فاز را استخراج می‌کنیم. یک مدل بسیار ساده از چنین تقویت‌کننده‌ای، رابطه میان عملگرهای یک مُد خروجی $\hat{b}$ و یک مُد ورودی $\hat{a}$ است که به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\hat{b} = \sqrt{G}\,\hat{a} + \sqrt{G-1}\,\hat{c}^{\dagger}, \qquad (۸.۱)$$

که در آن G بهره تقویت‌کننده است و $\hat{c}^{\dagger}$ عملگر خلقِ یک مُد حمام در یک فرکانس مرتبط ω است که رابطه

$$[\hat{c}, \hat{c}^{\dagger}] = 1$$

را ارضا می‌کند. به‌طور مشابه، برای مُد ورودی نیز داریم:

$$[\hat{a}, \hat{a}^{\dagger}] = 1.$$

چنین رابطه‌ای میان میدان‌های ورودی و خروجی می‌تواند با استفاده از یک مدار واقعی و فرمالیسم ورودی–خروجی در بخش ۴-۵ به‌دست آمده باشد؛ تمرین ۸-۱ را ببینید. فرض می‌کنیم که حالت حمام یک حالت بوزونی گرمایی است که در همه دماهای T رابطه زیر را دارد:

$$\langle \hat{c} \rangle_T = 0.$$

۱. توضیح دهید چرا مکانیک کوانتومی وجود تقویت‌کننده‌ای با رابطه

$$\hat{b} = \sqrt{G}\,\hat{a}, \qquad G > 1,$$

را ممنوع می‌کند؛ یعنی چرا لازم است سهمی از یک مُد حمام دیگر، مانند رابطه (۸.۱)، وجود داشته باشد. همچنین با استفاده از رابطه (۸.۱) بررسی کنید که:

$$[\hat{b}, \hat{b}^{\dagger}] = 1.$$

۲. دلیل این‌که این تقویت‌کننده «نامساس به فاز» نامیده می‌شود این است که هر دو کوادراتور ورودی

$$X_۱ = \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{۲}, \qquad X_۲ = \frac{i(\hat{a}^\dagger - \hat{a})}{۲}$$

که در ادامه برای ساده‌تر شدن نمادگذاری، کلاه روی این عملگرهای جدید را حذف می‌کنیم، با یک مقدار یکسان تقویت می‌شوند. نشان دهید:

$$\langle Y_۱ \rangle^۲ = G \langle X_۱ \rangle^۲,$$

و به‌طور مشابه:

$$\langle Y_۲ \rangle^۲ = G \langle X_۲ \rangle^۲,$$

که در آن کوادراتورهای خروجی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$Y_۱ = \frac{\hat{b} + \hat{b}^\dagger}{۲}, \qquad Y_۲ = \frac{i(\hat{b}^\dagger - \hat{b})}{۲}.$$

۳. نشان دهید که واریانس کوادراتور $Y_۱$ نابرابری زیر را ارضا می‌کند:

$$\left\langle \left(Y_۱ - \langle Y_۱ \rangle\right)^۲ \right\rangle = (\Delta Y_۱)^۲ \geq G(\Delta X_۱)^۲ + \frac{۱}{۴}|G - ۱|. \qquad (۲.۸)$$

یک رابطه مشابه نیز برای $(\Delta Y_۲)^۲$ برقرار است.

۴. نشان دهید که نابرابری رابطه (۲.۸) زمانی به تساوی تبدیل می‌شود که مُد حمام در دمای $T = ۰$ در حالت خلأ باشد.

توضیح: یک روش دیگر برای بیان حد هاوس–کیوز این است که دو طرف رابطه (۲.۸) را بر G تقسیم کنیم، به‌طوری‌که:

$$\frac{(\Delta Y_۱)^۲}{G} \geq (\Delta X_۱)^۲ + A_N,$$

که در آن

$$A_N \geq \frac{۱}{۴}(۱ - G^{-۱})$$

عدد نویز افزوده است. در حد بهره بزرگ، این مقدار به حداقل مقدار ۱/۴ نزدیک می‌شود. برای یک حمام با دمای بالا، که در آن نویز گرمایی افزوده غالب است، می‌توان از تقریب دمای بالا

$$kT \gg \hbar\omega$$

استفاده کرد و نوشت:

$$A_N(\omega) \approx \bar{n}(\omega) \approx \frac{kT}{\hbar\omega}.$$

پاسخ تمرین ۱.۱.۸

۱. می‌دانیم که مُدهای ورودی و خروجی، مُدهای بوزونی هستند؛ بنابراین باید روابط کموتاسیون بوزونی زیر را ارضا کنند:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = [\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = ۱.$$

اما اگر

$$\hat{b} = \sqrt{G}\, \hat{a},$$

آنگاه:

$$[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = G\mathbf{۱}.$$

این رابطه فقط زمانی با رابطه کموتاسیون بوزونی سازگار است که

$$G = ۱$$

باشد؛ یعنی نه تقویتی وجود دارد و نه تضعیفی. بنابراین برای داشتن $G > ۱$، باید یک مُد اضافی از حمام وارد رابطه شود.

اکنون برای بررسی رابطه $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = ۱$، از رابطه (۱.۸) و روابط کموتاسیون بوزونی $\hat{a}$ و $\hat{c}$ استفاده می‌کنیم:

$$\hat{b} = \sqrt{G}\hat{a} + \sqrt{G - ۱}\hat{c}^\dagger,$$

و بنابراین:

$$\hat{b}^\dagger = \sqrt{G}\hat{a}^\dagger + \sqrt{G - ۱}\hat{c}.$$

پس:

$$[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = G[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] + (G - ۱)[\hat{c}^\dagger, \hat{c}].$$

از آن‌جا که:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \mathbf{۱}, \qquad [\hat{c}^\dagger, \hat{c}] = -\mathbf{۱},$$

داریم:

$$[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = G\mathbf{۱} - (G - ۱)\mathbf{۱} = \mathbf{۱}.$$

پس رابطه (۱.۸) با ساختار بوزونی مُد خروجی سازگار است.

۲. ابتدا کوادراتورهای حمام را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X_{۱,\mathrm{bath}} = \frac{\hat{c} + \hat{c}^\dagger}{۲}, \qquad X_{۲,\mathrm{bath}} = \frac{i(\hat{c}^\dagger - \hat{c})}{۲}.$$

با استفاده از رابطه (۱.۸)، کوادراتورهای خروجی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$Y_i = \sqrt{G}\, X_i + \sqrt{G - ۱}\, X_{i,\mathrm{bath}}, \qquad i = ۱, ۲.$$

بنابراین:

$$\langle Y_i \rangle = \sqrt{G}\langle X_i \rangle + \sqrt{G - ۱}\langle X_{i,\mathrm{bath}} \rangle_T.$$

اما چون:

$$\langle \hat{c} \rangle_T = \mathbf{۰},$$

داریم:

$$\langle X_{i,\mathrm{bath}} \rangle_T = \mathbf{۰}.$$

در نتیجه:

$$\langle Y_i \rangle = \sqrt{G}\langle X_i \rangle.$$

پس:

$$\langle Y_i \rangle^۲ = G\langle X_i \rangle^۲.$$

این نتیجه برای هر دو کوادراتور $i = ۱, ۲$ برقرار است؛ بنابراین تقویت‌کننده نسبت به فاز نامساس است.

۳. واریانس کوادراتور خروجی برابر است با:

$$(\Delta Y_i)^۲ = \langle Y_i^۲ \rangle - \langle Y_i \rangle^۲.$$

از رابطه

$$Y_i = \sqrt{G} X_i + \sqrt{G - ۱} X_{i,\text{bath}}$$

داریم:

$$\langle Y_i^۲ \rangle = G\langle X_i^۲ \rangle + ۲\sqrt{G(G-۱)}\langle X_i \rangle \langle X_{i,\text{bath}} \rangle_T + (G-۱)\langle X_{i,\text{bath}}^۲ \rangle_T.$$

چون

$$\langle X_{i,\text{bath}} \rangle_T = ۰,$$

پس:

$$\langle Y_i^۲ \rangle = G\langle X_i^۲ \rangle + (G-۱)\langle X_{i,\text{bath}}^۲ \rangle_T.$$

همچنین از بخش قبل داریم:

$$\langle Y_i \rangle^۲ = G\langle X_i \rangle^۲.$$

بنابراین:

$$(\Delta Y_i)^۲ = G\left(\langle X_i^۲ \rangle - \langle X_i \rangle^۲\right) + (G-۱)\langle X_{i,\text{bath}}^۲ \rangle_T.$$

پس:

$$(\Delta Y_i)^۲ = G(\Delta X_i)^۲ + (G-۱)\langle X_{i,\text{bath}}^۲ \rangle_T.$$

اکنون برای حمام گرمایی داریم:

$$\langle X_{i,\text{bath}}^۲ \rangle_T = \frac{۱}{۴}\langle \hat{c}\hat{c}^\dagger + \hat{c}^\dagger\hat{c} \rangle_T = \frac{۱}{۴}\left[۱ + ۲\langle \hat{c}^\dagger\hat{c} \rangle_T\right].$$

اگر عدد اشغال گرمایی را به‌صورت

$$\bar{n}(\omega) = \frac{۱}{e^{\hbar\omega/kT} - ۱}$$

تعریف کنیم، آنگاه:

$$\langle X_{i,\text{bath}}^۲ \rangle_T = \frac{۱}{۴}\left[۱ + ۲\bar{n}(\omega)\right] \geq \frac{۱}{۴}.$$

در نتیجه:

$$(\Delta Y_i)^۲ \geq G(\Delta X_i)^۲ + \frac{۱}{۴}(G-۱).$$

برای $G > ۱$، این همان رابطه (۲.۸) است:

$$(\Delta Y_i)^۲ \geq G(\Delta X_i)^۲ + \frac{۱}{۴}|G-۱|.$$

۴. در حالت خلأ داریم:

$$\bar{n}(\omega) = ۰$$

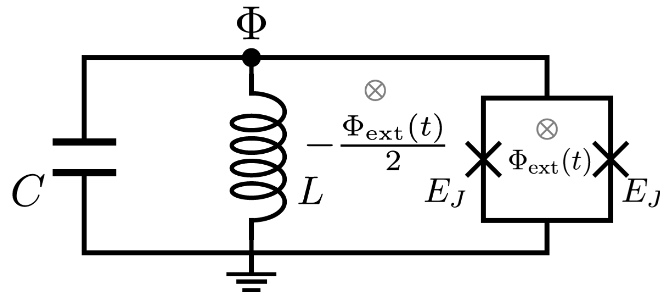
برای هر ω. بنابراین:

$$\langle X_{i,\text{bath}}^۲ \rangle_{T=۰} = \frac{۱}{۴}.$$

در نتیجه:

$$(\Delta Y_i)^۲ = G(\Delta X_i)^۲ + \frac{۱}{۴}(G-۱).$$

پس در دمای صفر، یعنی وقتی مُد حمام در حالت خلأ قرار دارد، نابرابری رابطه (۲.۸) به تساوی تبدیل می‌شود. این همان حد کوانتومی هاوس–کیوز برای تقویت‌کننده بوزونی خطی و نامساس به فاز است.



شکل ۸-۱: نوسانگر LC با یک حلقه SQUID که دو شار زمان‌وابسته از آن عبور می‌کنند.

تمرین ۲.۱.۸: تقویت‌کننده پارامتری تبهگن

در این تمرین، تقویت‌کننده‌ای را در نظر می‌گیریم که تقویت حساس به فاز، یا فشردگی تک‌مدی، را پیاده‌سازی می‌کند. فشردگی و سایر تبدیل‌های اپتیک کوانتومی در مرجع [۶۸] به‌خوبی توصیف شده‌اند. مدار شکل ۸-۱ را در نظر بگیرید.

۱. لاگرانژی و هامیلتونی سیستم را به‌دست آورید.

۲. شار زمان‌وابسته زیر را در نظر بگیرید:

$$\Phi_{\rm ext}(t) = \mathcal{E}_P \cos \omega_P t$$

و جمله پتانسیل در هامیلتونی را با استفاده از بسط مرتبه اول ژاکوبی–انگر بنویسید:

$$\cos(z\cos\theta) \approx J_۰(z) - ۲J_۲(z)\cos(۲\theta), \qquad (۳.۸)$$

که در آن $J_۰(z)$ و $J_۲(z)$ به‌ترتیب تابع بسل نوع اول مرتبه صفر و مرتبه دوم هستند. همچنین پتانسیل را تا مرتبه دوم بسط دهید. سپس عملگرهای نابودی و خلق را برای مد معرفی کنید. نشان دهید که برای مقدار خاصی از ω_P، که باید آن را تعیین کنید، در تصویر برهم‌کنش یا چارچوب چرخان با فرکانس تشدید مد، هامیلتونی یک تقویت‌کننده پارامتری تبهگن به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$H_{\rm DPA} = \frac{\hbar\epsilon}{۲}\left(\hat{a}^۲ + \hat{a}^{\dagger ۲}\right). \qquad (۴.۸)$$

پارامتر ϵ را تعیین کنید.

۳. عملگر تحول زمانی متناظر با $H_{\rm DPA}$ شکلی مانند عملگر فشردگی یکانی دارد:

$$S(\xi) = \exp\left[\frac{۱}{۲}\left(\xi^*\hat{a}^۲ - \xi\hat{a}^{\dagger ۲}\right)\right], \qquad (۵.۸)$$

که در حالت کلی

$$\xi = re^{i\theta}$$

یک عدد مختلط است. می‌توان نشان داد، برای مثال با مراجعه به اثبات‌های استاندارد یا مرجع [۶۸]، که برای چنین عملگری داریم:

$$S^\dagger(\xi)\hat{a}S(\xi) = \hat{a}\cosh r - \hat{a}^\dagger e^{i\theta}\sinh r. \qquad (۶.۸)$$

با استفاده از رابطه (۶.۸)، میانگین و واریانس دو کوادراتور $X_{\theta/2}$ و $X_{\theta/2+\pi/2}$ را محاسبه کنید. در اینجا از تعریف زیر استفاده کنید:

$$X_\varphi = \frac{\hat{a}e^{-i\varphi} + \hat{a}^\dagger e^{i\varphi}}{2},$$

و حالت فشرده خلأ را به‌صورت

$$|\xi\rangle = S(\xi)|0\rangle$$

در نظر بگیرید. چرا این مدل یک تقویت‌کننده حساس به فاز را پیاده‌سازی می‌کند؟ بر اساس این نتایج، اگر سیستم از حالت خلأ شروع کند و با هامیلتونی رابطه (۴.۸) تحول زمانی پیدا کند، چه اتفاقی می‌افتد؟

۴. اکنون اتصال یک خط انتقال به سیستم را در نظر بگیرید. معادله هایزنبرگ–لانژون را برای عملگرهای نابودی و خلق $\hat{a}(t)$ و $\hat{a}^\dagger(t)$ بنویسید، همانند بخش ۴-۵. سپس سیستم را در حالت پایا حل کنید؛ یعنی $\hat{b}_{\text{out}}(t)$ را بر حسب میدان‌های ورودی بنویسید. چه پارامترهایی مقدار فشردگی در $\hat{b}_{\text{out}}$ را تعیین می‌کنند؟ رابطه‌ای برای $\cosh(r)$ به‌دست آورید.

توضیح: این تحلیل را می‌توان با تبدیل فوریه معادلات لانژون و بررسی $\hat{b}_{\text{out}}[\omega]$ به‌عنوان تابعی از $\hat{b}_{\text{in}}[\omega]$ و $\hat{b}^\dagger_{\text{in}}[\omega]$ بهبود داد. این کار امکان فهم وابستگی فرکانسی بهره فشردگی را فراهم می‌کند.

پاسخ تمرین ۲.۱.۸

۱. لاگرانژی سیستم به‌صورت زیر است:

$$\mathcal{L} = \frac{C}{2}\dot{\Phi}^2 - \frac{\Phi^2}{2L} + E_J \cos\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}\left(\Phi + \frac{\Phi_{\text{ext}}(t)}{2}\right)\right] + E_J \cos\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}\left(\Phi - \frac{\Phi_{\text{ext}}(t)}{2}\right)\right]. \tag{۷.۸}$$

با شناسایی متغیر مزدوج

$$Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}},$$

هامیلتونی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$H = \frac{Q^2}{2C} + \frac{\Phi^2}{2L} - 2E_J \cos\left[\frac{\pi}{\Phi_0}\Phi_{\text{ext}}(t)\right]\cos\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}\Phi\right]. \tag{۸.۸}$$

۲. اکنون

$$\Phi_{\text{ext}}(t) = \mathcal{E}_P \cos(\omega_P t)$$

را در نظر می‌گیریم. پتانسیل برابر است با:

$$U = \frac{\Phi^2}{2L} - 2E_J \cos\left[\frac{\pi}{\Phi_0}\mathcal{E}_P\cos(\omega_P t)\right]\cos\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}\Phi\right]. \tag{۹.۸}$$

با استفاده از بسط ژاکوبی–انگر برای $\cos(z\cos\theta)$، با بسط کسینوس دوم تا مرتبه دوم نسبت به Φ، و با صرف‌نظر از جمله‌هایی که معادلات اویلر–لاگرانژ را تغییر نمی‌دهند، داریم:

$$U = \frac{\Phi^2}{2L} + 2E_J\left[J_0\left(\frac{\pi\mathcal{E}_P}{\Phi_0}\right) - 2J_2\left(\frac{\pi\mathcal{E}_P}{\Phi_0}\right)\cos(2\omega_P t)\right]\left(\frac{2\pi}{\Phi_0}\right)^2\Phi^2. \tag{۱۰.۸}$$

برای فشرده‌تر شدن نمادگذاری، یک القاگر مؤثر L_H را با رابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$\frac{1}{L_H} = \frac{1}{L} + 4E_J J_0\left(\frac{\pi\mathcal{E}_P}{\Phi_0}\right)\left(\frac{2\pi}{\Phi_0}\right)^2, \tag{۱۱.۸}$$

و همچنین پارامتر

$$\lambda$$

را به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$\lambda = -۴E_J J_۲ \left(\frac{\pi \mathcal{E}_P}{\Phi_۰}\right) \left(\frac{۲\pi}{\Phi_۰}\right)^۲. \tag{۱۲.۸}$$

در نتیجه، هامیلتونی را می‌توان به‌شکل زیر بازنویسی کرد:

$$H = \frac{Q^۲}{۲C} + \frac{\Phi^۲}{۲L_H} + \lambda \cos(۲\omega_P t)\Phi^۲. \tag{۱۳.۸}$$

اکنون عملگرهای نابودی و خلق را معرفی می‌کنیم. با تعریف

$$Z = \sqrt{\frac{L_H}{C}}, \qquad \omega_r = \frac{۱}{\sqrt{L_H C}},$$

داریم:

$$\Phi = \sqrt{\frac{\hbar Z}{۲}} \left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right), \tag{a۱۴.۸}$$

و

$$Q = i\sqrt{\frac{\hbar}{۲Z}} \left(\hat{a}^\dagger - \hat{a}\right). \tag{b۱۴.۸}$$

بر حسب این عملگرها، هامیلتونی به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$H = \hbar\omega_r \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hbar\epsilon}{۲} \left(e^{i۲\omega_P t} + e^{-i۲\omega_P t}\right) \left(\hat{a}^۲ + \hat{a}^{\dagger ۲} + ۱ + ۲\hat{a}^\dagger \hat{a}\right), \tag{۱۵.۸}$$

که در آن پارامتر

$$\epsilon = \frac{\lambda Z}{۲}$$

را تعریف کرده‌ایم.

اکنون به تصویر برهم‌کنش با

$$H_۰ = \hbar\omega_r \hat{a}^\dagger \hat{a}$$

می‌رویم. هامیلتونی در تصویر برهم‌کنش برابر می‌شود با:

$$\begin{aligned} H_I(t) = H_{\text{DPA}} &= e^{iH_۰ t/\hbar} H e^{-iH_۰ t/\hbar} - H_۰ \\ &= \frac{\hbar\epsilon}{۲} \left(e^{i۲\omega_P t} + e^{-i۲\omega_P t}\right) \left(\hat{a}^۲ e^{-۲i\omega_r t} + \hat{a}^{\dagger ۲} e^{۲i\omega_r t} + ۱ + ۲\hat{a}^\dagger \hat{a}\right). \end{aligned} \tag{۱۶.۸}$$

برای به‌دست‌آوردن هامیلتونی مطلوب، باید فرکانس پمپ را طوری انتخاب کنیم که فقط جمله مورد نظر مستقل از زمان شود و اثر سایر جمله‌ها در تقریب موج چرخان، یعنی RWA، میانگین‌گیری شود. این فرکانس به‌وضوح برابر است با:

$$\omega_P = \omega_r.$$

در نهایت، هامیلتونی تقویت‌کننده پارامتری تبهگن، در تقریب RWA، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$H^{\text{RWA}} = \frac{\hbar\epsilon}{۲} \left(\hat{a}^۲ + \hat{a}^{\dagger ۲}\right). \tag{۱۷.۸}$$

۳. با استفاده از رابطه (۶.۸) و مزدوج هرمیتی آن، بلافاصله روشن است که میانگین یک کوادراتور عمومی در حالت فشرده خلأ

$$|\xi\rangle = S(\xi)|\cdot\rangle$$

صفر است. در واقع، کافی است نشان دهیم که میانگین $\hat{a}$ صفر است:

$$\langle\xi|\hat{a}|\xi\rangle = \langle\cdot|S^\dagger(\xi)\hat{a}S(\xi)|\cdot\rangle = \cosh r\,\langle\cdot|\hat{a}|\cdot\rangle - e^{i\theta}\sinh r\,\langle\cdot|\hat{a}^\dagger|\cdot\rangle = \cdot. \qquad (۱۸.۸)$$

به‌طور مشابه:

$$\langle\xi|\hat{a}^\dagger|\xi\rangle = \cdot.$$

این نتیجه نشان می‌دهد که واریانس یک کوادراتور عمومی $(\Delta X_\varphi)^۲$ برابر با میانگین $X_\varphi^۲$ در حالت فشرده خلأ است.

برای محاسبه این واریانس، ابتدا بررسی می‌کنیم که کوادراتور عمومی X_φ تحت اثر عملگر فشردگی چگونه تبدیل می‌شود. با استفاده دوباره از رابطه (۶.۸) و مزدوج هرمیتی آن، داریم:

$$S^\dagger(\xi)X_{\theta/۲}S(\xi) = [\cosh(r) - \sinh(r)]\,X_{\theta/۲}, \qquad (۱۹.۸)$$

و

$$S^\dagger(\xi)X_{\theta/۲+\pi/۲}S(\xi) = [\cosh(r) + \sinh(r)]\,X_{\theta/۲+\pi/۲}. \qquad (۲۰.۸)$$

اکنون می‌توانیم واریانس $X_{\theta/۲}$ را در حالت فشرده خلأ محاسبه کنیم:

$$(\Delta X_{\theta/۲})^۲ = \langle\xi|X_{\theta/۲}^۲|\xi\rangle = \left[\cosh^۲(r) + \sinh^۲(r) - ۲\sinh(r)\cosh(r)\right]\langle\cdot|X_{\theta/۲}^۲|\cdot\rangle = \frac{۱}{۴}e^{-r}. \qquad (۲۱.۸)$$

به‌طور مشابه، واریانس کوادراتور $X_{\theta/۲+\pi/۲}$ برابر است با:

$$(\Delta X_{\theta/۲+\pi/۲})^۲ = \frac{۱}{۴}e^{r}. \qquad (۲۲.۸)$$

می‌بینیم که واریانس کوادراتور $X_{\theta/۲}$ نسبت به حالت خلأ کاهش یافته است، یعنی این کوادراتور فشرده شده است؛ در حالی که واریانس کوادراتور مزدوج $X_{\theta/۲+\pi/۲}$ افزایش یافته است، یعنی پادفشرده شده است. این دو کوادراتور خاص هستند، زیرا تنها کوادراتورهایی‌اند که برای آن‌ها رابطه عدم‌قطعیت

$$(\Delta X_{\theta/۲})^۲(\Delta X_{\theta/۲+\pi/۲})^۲ \geq \frac{۱}{۱۶}$$

برای حالت فشرده خلأ با علامت تساوی برقرار است. در نتیجه، تقویت حساس به فاز است، زیرا کوادراتورهای متفاوت، با فازهای متفاوت، به مقدارهای متفاوتی فشرده می‌شوند.

اکنون عملگر تحول زمانی متناظر با هامیلتونی رابطه (۴.۸) را در نظر می‌گیریم:

$$U_I(t) = \exp\left[-\frac{i\epsilon t}{۲}\left(\hat{a}^۲ + \hat{a}^{\dagger ۲}\right)\right], \qquad (۲۳.۸)$$

که یک عملگر فشردگی با

$$\xi(t) = i\epsilon t = \epsilon t e^{i\pi/۲}$$

است؛ بنابراین

$$\theta = \frac{\pi}{۲}.$$

نتیجه می‌گیریم که اگر از حالت خلأ شروع کنیم، عملگر تحول زمانی رابطه (۲۳.۸) یک حالت فشرده خلأ ایجاد می‌کند که در آن کوادراتور $X_{\pi/۴}$ فشرده و کوادراتور $X_{۳\pi/۴}$ پادفشرده می‌شود. اندازه پارامتر فشردگی ξ، یعنی r، به‌صورت خطی با زمان افزایش می‌یابد.

۴. معادلات لانژون متناظر با $\hat{a}(t)$ و $\hat{a}^\dagger(t)$، با حذف وابستگی زمانی برای سادگی، به‌صورت زیر هستند:

$$\frac{d\hat{a}}{dt} = \frac{۱}{i\hbar}[\hat{a}, H_{\rm DPA}] - \frac{\kappa}{۲}\hat{a} + \sqrt{\kappa}\hat{b}_{\rm in}, \quad \text{(a۲۴.۸)}$$

$$\frac{d\hat{a}^\dagger}{dt} = \frac{۱}{i\hbar}[\hat{a}^\dagger, H_{\rm DPA}] - \frac{\kappa}{۲}\hat{a}^\dagger + \sqrt{\kappa}\hat{b}_{\rm in}^\dagger. \quad \text{(b۲۴.۸)}$$

این روابط به معادلات زیر منجر می‌شوند:

$$\frac{d\hat{a}}{dt} = -i\epsilon\hat{a}^\dagger - \frac{\kappa}{۲}\hat{a} + \sqrt{\kappa}\hat{b}_{\rm in}, \quad \text{(a۲۵.۸)}$$

$$\frac{d\hat{a}^\dagger}{dt} = i\epsilon\hat{a} - \frac{\kappa}{۲}\hat{a}^\dagger + \sqrt{\kappa}\hat{b}_{\rm in}^\dagger, \quad \text{(b۲۵.۸)}$$

همراه با رابطه ورودی-خروجی:

$$\hat{b}_{\rm out} = \sqrt{\kappa}\hat{a} - \hat{b}_{\rm in}. \quad \text{(۲۶.۸)}$$

در حالت پایا، این معادلات به روابط جبری زیر تبدیل می‌شوند:

$$-i\epsilon\hat{a}^\dagger - \frac{\kappa}{۲}\hat{a} + \sqrt{\kappa}\hat{b}_{\rm in} = ۰, \quad \text{(a۲۷.۸)}$$

$$i\epsilon\hat{a} - \frac{\kappa}{۲}\hat{a}^\dagger + \sqrt{\kappa}\hat{b}_{\rm in}^\dagger = ۰. \quad \text{(b۲۷.۸)}$$

با حل این دستگاه برای $\hat{a}$، داریم:

$$\hat{a} = -\frac{۴i\epsilon}{\kappa^۲ - ۴\epsilon^۲}\sqrt{\kappa}\,\hat{b}_{\rm in}^\dagger + \frac{۲\kappa^۲}{\kappa^۲ - ۴\epsilon^۲}\frac{۱}{\sqrt{\kappa}}\hat{b}_{\rm in}. \quad \text{(۲۸.۸)}$$

با استفاده از رابطه ورودی–خروجی (۲۶.۸)، عملگر نابودی میدان خروجی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\hat{b}_{\rm out}(t) = \frac{\kappa^۲ + ۴\epsilon^۲}{\kappa^۲ - ۴\epsilon^۲}\hat{b}_{\rm in}(t) - i\frac{۴\epsilon\kappa}{\kappa^۲ - ۴\epsilon^۲}\hat{b}_{\rm in}^\dagger(t). \quad \text{(۲۹.۸)}$$

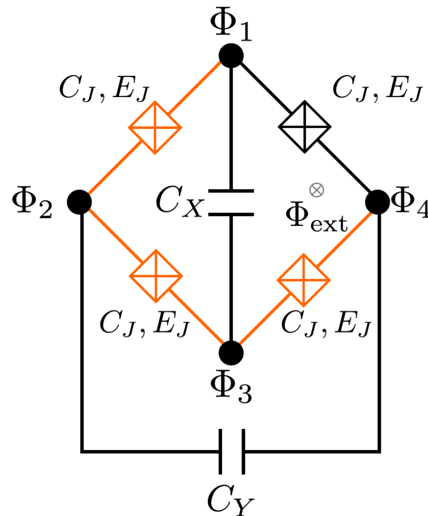
می‌توانید بررسی کنید که این رابطه از شکل زیر است:

$$\hat{b}_{\rm out} = \hat{b}_{\rm in}\cosh(r) - \hat{b}_{\rm in}^\dagger e^{i\theta}\sinh(r),$$

و بنابراین:

$$\cosh(r) = \frac{\kappa^۲ + ۴\epsilon^۲}{\kappa^۲ - ۴\epsilon^۲}.$$

پس مقدار فشردگی به شدت جمله فشردگی ϵ و شدت کوپلینگ یا واپاشی به خط انتقال، یعنی κ، بستگی دارد. توجه کنید که مقدار فشردگی r در این حالت به‌صورت خطی با زمان افزایش نمی‌یابد، بلکه توسط نسبت میان ϵ و κ محدود می‌شود.



شکل ۸-۲: مدار یک مدولاتور حلقه‌ای جوزفسونی Josephson Ring Modulator.

تمرین ۳.۱.۸: تقویت‌کننده پارامتری ناتبهگن؛ مدولاتور حلقه‌ای جوزفسونی

مدار یک مدولاتور حلقه‌ای جوزفسونی، یا JRM، را در شکل ۸-۲ در نظر بگیرید. فرض کنید اتصال‌های جوزفسونی برابر هستند و یک شار مغناطیسی خارجی ثابت $\Phi_{\rm ext}$ از حلقه عبور می‌کند. هدف این تمرین آن است که نشان دهد چگونه می‌توان از این مدار برای پیاده‌سازی هامیلتونی یک تقویت‌کننده پارامتری ناتبهگن در رابطه (۳۳.۸) استفاده کرد. در حالی که تقویت‌کننده تبهگن با هامیلتونی رابطه (۴.۸) در تمرین قبلی، فشردگی تک‌مدی ایجاد می‌کند، تقویت‌کننده ناتبهگن در رابطه (۳۳.۸) فشردگی دومدی ایجاد می‌کند؛ یعنی دو مدی را که روی آن‌ها عمل می‌کند، درهم‌تنیده می‌سازد.

۱. لاگرانژی این سیستم را به‌دست آورید. درخت نشان‌داده‌شده با رنگ نارنجی در شکل ۸-۲ را در نظر بگیرید و فرض کنید $\Phi_۳ = ۰$ گره زمین مرجع است. سپس دو تغییر متغیر متوالی معرفی کنید. ابتدا:

$$\Phi_۱ - \Phi_۲ = \tilde{\Phi}_۱ - \tilde{\Phi}_۲ + \frac{\Phi_{\rm ext}}{۴}, \qquad (\text{a}۳۰.۸)$$

$$\Phi_۲ = \tilde{\Phi}_۲ + \frac{\Phi_{\rm ext}}{۴}, \qquad (\text{b}۳۰.۸)$$

$$\Phi_۴ = \tilde{\Phi}_۴ - \frac{\Phi_{\rm ext}}{۴}, \qquad (\text{c}۳۰.۸)$$

و سپس:

$$\Phi_X = \tilde{\Phi}_۱. \qquad (\text{a}۳۱.۸)$$

$$\Phi_Y = \tilde{\Phi}_۴ - \tilde{\Phi}_۲, \qquad (\text{b}۳۱.۸)$$

$$\Phi_Z = \tilde{\Phi}_۱ - \tilde{\Phi}_۲ - \tilde{\Phi}_۴. \qquad (\text{c}۳۱.۸)$$

هامیلتونی را بر حسب Φ_X, Φ_Y, Φ_Z و متغیرهای مزدوج آن‌ها به‌دست آورید. با قرار دادن

$$\Phi_{\text{ext}} = \frac{\Phi_۰}{۲},$$

یعنی نصف کوانتوم شار، نشان دهید که سیستم تقریباً هامیلتونی سه نوسانگر هارمونیک را پیاده‌سازی می‌کند که با جمله کوپلینگ زیر به هم متصل شده‌اند:

$$H_c = \nu \Phi_X \Phi_Y \Phi_Z.$$

عبارت ν را به‌دست آورید.

راهنمایی: می‌توانید پتانسیل را تا مرتبه دوم بسط دهید. در نهایت، عملگرهای نابودی و خلق را معرفی کنید و نشان دهید که با انتخاب دقیق فرکانس‌های مشخصه $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$ هامیلتونی اختلاط سه‌موجی زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{H_{۳W}}{\hbar} \approx \omega_X \hat{a}_X^\dagger \hat{a}_X + \omega_Y \hat{a}_Y^\dagger \hat{a}_Y + \omega_Z \hat{a}_Z^\dagger \hat{a}_Z + \eta \left(\hat{a}_X^\dagger \hat{a}_Y^\dagger \hat{a}_Z + \text{h.c.} \right), \qquad (۳۲.۸)$$

که در آن η پارامتر اختلاط سه‌موجی است.

پاسخ تمرین ۳.۱.۸

۱. هامیلتونی رابطه (۳۲.۸) را در نظر بگیرید. در ادامه، مد X را مد سیگنال می‌نامیم، یعنی

$$\hat{a}_X = \hat{a}_S,$$

مد Y را مد آیدلر می‌نامیم، یعنی

$$\hat{a}_Y = \hat{a}_I,$$

و مد Z را مد پمپ می‌نامیم، یعنی

$$\hat{a}_Z = \hat{a}_P.$$

مد پمپ را با یک محرک همدوس در فرکانس ω_P و با دامنه بزرگ تحریک می‌کنیم، به‌گونه‌ای که بتوانیم $\hat{a}_P$ را با مقدار چشمداشتی زمان‌وابسته تقریبی زیر جایگزین کنیم:

$$\langle \hat{a}_P \rangle = i\alpha_P e^{-i\omega_P t},$$

که در آن α_P یک دامنه حقیقی است. هامیلتونی را در تصویر برهمکنش، یا چارچوب چرخان، در فرکانس‌های مدهای X و Y بنویسید تا هامیلتونی فشردگی دومدی زیر به‌دست آید:

$$\frac{\tilde{H}_{I۳W}}{\hbar} = i\lambda \left(\hat{a}_S^\dagger \hat{a}_I^\dagger - \hat{a}_S \hat{a}_I \right). \qquad (۳۳.۸)$$

۲. اکنون فرض می‌کنیم مد سیگنال به یک خط انتقال با میدان ورودی $\hat{b}_{S,\text{in}}(t)$ کوپل شده است، که شدت کوپلینگ آن با نرخ واپاشی κ_S تعیین می‌شود. همچنین مد آیدلر به خط انتقال دیگری با میدان ورودی $\hat{b}_{I,\text{in}}(t)$ کوپل شده است، که شدت کوپلینگ آن با نرخ واپاشی κ_I تعیین می‌شود. معادلات حرکت هایزنبرگ–لانژون را برای $\hat{a}_S(t)$ و $\hat{a}_I^\dagger(t)$ مانند بخش ۴-۵ بنویسید و جواب حالت پایا $\hat{b}_{S,\text{out}}$ را بر حسب میدان‌های ورودی سیگنال و آیدلر به‌دست آورید. اثر مد آیدلر را زمانی که از حالت خلأ شروع می‌کند توضیح دهید؛ تمرین ۸-۱ را ببینید.

توضیح: این تحلیل را می‌توان با تبدیل فوریه معادلات لانژون و بررسی $\hat{b}_{S,\text{out}}[\omega]$ به‌عنوان تابعی از $\hat{b}_{S,\text{in}}[\omega]$ و $\hat{b}_{I,\text{in}}^\dagger[\omega]$ بهبود داد. این کار امکان فهم وابستگی فرکانسی را فراهم می‌کند؛ مرجع [۱۴۴] را ببینید.

۳. لاگرانژی بر حسب متغیرهای گره‌ای به‌صورت زیر است:

$$\mathcal{L} = \frac{C_J}{2}\dot{\Phi}_2^2 + \frac{C_J}{2}\dot{\Phi}_4^2 + \frac{C_J}{2}(\dot{\Phi}_1 - \dot{\Phi}_2)^2 + \frac{C_J}{2}(\dot{\Phi}_1 - \dot{\Phi}_4)^2 + \frac{C_X}{2}\dot{\Phi}_1^2 + \frac{C_Y}{2}(\dot{\Phi}_4 - \dot{\Phi}_2)^2$$
$$+ E_J \cos\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}\Phi_2\right] + E_J \cos\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}\Phi_4\right] + E_J \cos\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}(\Phi_1 - \Phi_2)\right] + E_J \cos\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}(\Phi_1 - \Phi_4 - \Phi_{\mathrm{ext}})\right]. \quad (۳۴.۸)$$

تغییر متغیر اولِ پیشنهادی، لاگرانژی را به شکل زیر درمی‌آورد:

$$\mathcal{L} = \frac{C_J}{2}\dot{\tilde{\Phi}}_2^2 + \frac{C_J}{2}\dot{\tilde{\Phi}}_4^2 + \frac{C_J}{2}(\dot{\tilde{\Phi}}_1 - \dot{\tilde{\Phi}}_2)^2 + \frac{C_J}{2}(\dot{\tilde{\Phi}}_1 - \dot{\tilde{\Phi}}_4)^2 + \frac{C_X}{2}\dot{\tilde{\Phi}}_1^2 + \frac{C_Y}{2}(\dot{\tilde{\Phi}}_4 - \dot{\tilde{\Phi}}_2)^2$$
$$+ E_J \cos\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}\left(\tilde{\Phi}_2 + \frac{\Phi_{\mathrm{ext}}}{4}\right)\right] + E_J \cos\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}\left(\tilde{\Phi}_4 - \frac{\Phi_{\mathrm{ext}}}{4}\right)\right]$$
$$+ E_J \cos\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}\left(\tilde{\Phi}_1 - \tilde{\Phi}_2 + \frac{\Phi_{\mathrm{ext}}}{4}\right)\right] + E_J \cos\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}\left(\tilde{\Phi}_1 - \tilde{\Phi}_4 - \frac{\Phi_{\mathrm{ext}}}{4}\right)\right], \quad (۳۵.۸)$$

در حالی که تغییر متغیر دوم، بخش جنبشی لاگرانژی را قطری می‌کند و آن را به شکل ساده زیر درمی‌آورد:

$$\mathcal{L} = \frac{C_J + C_X}{2}\dot{\Phi}_X^2 + \frac{C_J + C_Y}{2}\dot{\Phi}_Y^2 + \frac{C_J}{2}\dot{\Phi}_Z^2$$
$$+ 4E_J \cos\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}\frac{\Phi_{\mathrm{ext}}}{4}\right]\cos\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}\frac{\Phi_X}{2}\right]\cos\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}\frac{\Phi_Y}{2}\right]\cos\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}\frac{\Phi_Z}{2}\right]$$
$$+ 4E_J \sin\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}\frac{\Phi_{\mathrm{ext}}}{4}\right]\sin\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}\frac{\Phi_X}{2}\right]\sin\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}\frac{\Phi_Y}{2}\right]\sin\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}\frac{\Phi_Z}{2}\right]. \quad (۳۶.۸)$$

از این لاگرانژی، به‌سادگی می‌توان هامیلتونی را به‌دست آورد:

$$H = \frac{Q_X^2}{2C_{\Sigma X}} + \frac{Q_Y^2}{2C_{\Sigma Y}} + \frac{Q_Z^2}{2C_J}$$
$$- 4E_J \cos\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}\frac{\Phi_{\mathrm{ext}}}{4}\right]\cos\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}\frac{\Phi_X}{2}\right]\cos\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}\frac{\Phi_Y}{2}\right]\cos\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}\frac{\Phi_Z}{2}\right]$$
$$- 4E_J \sin\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}\frac{\Phi_{\mathrm{ext}}}{4}\right]\sin\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}\frac{\Phi_X}{2}\right]\sin\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}\frac{\Phi_Y}{2}\right]\sin\left[\frac{2\pi}{\Phi_0}\frac{\Phi_Z}{2}\right], \quad (۳۷.۸)$$

که در آن متغیرهای مزدوج به‌صورت

$$Q_X = C_{\Sigma X}\dot{\Phi}_X, \qquad Q_Y = C_{\Sigma Y}\dot{\Phi}_Y, \qquad Q_Z = C_J\dot{\Phi}_Z$$

تعریف شده‌اند و برای اختصار نوشته‌ایم:

$$C_{\Sigma X} = C_X + C_J, \qquad C_{\Sigma Y} = C_Y + C_J.$$

با قرار دادن $\Phi_{\mathrm{ext}} = \frac{\Phi_0}{2}$ و بسط پتانسیل تا مرتبه دوم، به‌صورت پیشنهادی، به‌دست می‌آوریم:

$$H = \frac{Q_X^2}{2C_{\Sigma X}} + \frac{Q_Y^2}{2C_{\Sigma Y}} + \frac{Q_Z^2}{2C_J} + \frac{1}{2L_{\mathrm{JRM}}}\left(\Phi_X^2 + \Phi_Y^2 + \Phi_Z^2\right) + \nu\Phi_X\Phi_Y\Phi_Z, \quad (۳۸.۸)$$

که در آن اندوکتانس مشخصه JRM به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$L_{\rm JRM}=\frac{\Phi_{\cdot}^{۲}}{۴\sqrt{۲}E_J\pi^{۲}},$$

و پارامتر کوپلینگ برابر است با:

$$\nu=-\frac{۲\sqrt{۲}E_J\pi^{۳}}{\Phi_{\cdot}^{۳}}.$$

برای عبور به توصیف کوانتومی، عملگرهای نابودی و خلق را برای مدهای X، Y و Z به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$\Phi_K=\sqrt{\frac{\hbar Z_K}{۲}}\left(\hat{a}_K+\hat{a}_K^{\dagger}\right), \qquad (\text{a}۳۹.۸)$$

$$Q_K=i\sqrt{\frac{\hbar}{۲Z_K}}\left(\hat{a}_K^{\dagger}-\hat{a}_K\right), \qquad (\text{b}۳۹.۸)$$

که در آن $K=\{X,Y,Z\}$ و Z_K امپدانس مشخصه مد K است. در نتیجه هامیلتونی را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$H=\hbar\omega_X\hat{a}_X^{\dagger}\hat{a}_X+\hbar\omega_Y\hat{a}_Y^{\dagger}\hat{a}_Y+\hbar\omega_Z\hat{a}_Z^{\dagger}\hat{a}_Z+\hbar\eta\left(\hat{a}_X+\hat{a}_X^{\dagger}\right)\left(\hat{a}_Y+\hat{a}_Y^{\dagger}\right)\left(\hat{a}_Z+\hat{a}_Z^{\dagger}\right), \qquad (۴۰.۸)$$

که در آن فرکانس‌های مشخصه تشدیدگرها و پارامتر زیر را معرفی کرده‌ایم:

$$\hbar\eta=\nu\left(\frac{\hbar}{۲}\right)^{۳/۲}\sqrt{Z_XZ_YZ_Z}. \qquad (۴۱.۸)$$

حال نگاهی دقیق‌تر به رابطه (۴۰.۸) می‌اندازیم. می‌خواهیم استدلالی داشته باشیم که چرا فقط جمله $\hat{a}_X^{\dagger}\hat{a}_Y^{\dagger}\hat{a}_Z$ و مزدوج هرمیتی آن را نگه می‌داریم. روشن است که باید شرطی اعمال کنیم که این جمله، تنها جمله پایستار انرژی یا تشدیدی در میان همه جمله‌هایی باشد که در بسط هامیلتونی کوپلینگ ظاهر می‌شوند. این حالت زمانی رخ می‌دهد که فرکانس مد Z، یعنی مد پمپ، برابر مجموع دو فرکانس دیگر باشد. بنابراین شرط زیر را قرار می‌دهیم:

$$\omega_Z=\omega_X+\omega_Y.$$

۴. اکنون هامیلتونی را با نمادگذاری جدید بازنویسی می‌کنیم و فقط جمله‌های اختلاط سه‌موجی را نگه می‌داریم:

$$\frac{H_{۳W}}{\hbar}\approx\omega_S\hat{a}_S^{\dagger}\hat{a}_S+\omega_I\hat{a}_I^{\dagger}\hat{a}_I+\omega_P\hat{a}_P^{\dagger}\hat{a}_P+\eta\left(\hat{a}_S^{\dagger}\hat{a}_I^{\dagger}\hat{a}_P+\text{h.c.}\right), \qquad (۴۲.۸)$$

با شرط اختلاط سه‌موجی:

$$\omega_P=\omega_I+\omega_S.$$

با فرض این‌که پمپ را به‌شدت تحریک کرده‌ایم، عملگر $\hat{a}_P$ را با مقدار میانگین آن $i\alpha_Pe^{-i\omega_Pt}$ جایگزین می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{H_{۳W}}{\hbar}\approx\omega_S\hat{a}_S^{\dagger}\hat{a}_S+\omega_I\hat{a}_I^{\dagger}\hat{a}_I+i\lambda\left(\hat{a}_S^{\dagger}\hat{a}_I^{\dagger}e^{-i\omega_Pt}-\hat{a}_S\hat{a}_Ie^{i\omega_Pt}\right), \qquad (۴۳.۸)$$

که در آن تعریف کرده‌ایم:

$$\lambda = \eta \alpha_P.$$

با رفتن به تصویر برهم‌کنش در فرکانس‌های تشدیدگرها، یعنی با

$$\frac{H_۰}{\hbar} = \omega_S \hat{a}_S^\dagger \hat{a}_S + \omega_I \hat{a}_I^\dagger \hat{a}_I,$$

داریم:

$$\tilde{H}_{۳W} = e^{iH_۰ t/\hbar} H_{۳W} e^{-iH_۰ t/\hbar} - H_۰,$$

و در نتیجه رابطه (۳۳.۸) به‌دست می‌آید.

۵. معادلات هایزنبرگ-لانژون زیر را برای $\hat{a}_I^\dagger$ و $\hat{a}_S$ داریم:

$$\frac{d\hat{a}_I^\dagger}{dt} = \frac{۱}{i\hbar}[\hat{a}_I^\dagger, \tilde{H}_{I۳W}] - \frac{\kappa_I}{۲}\hat{a}_I^\dagger + \sqrt{\kappa_I}\hat{b}_{I,\text{in}}^\dagger, \quad \text{(a۴۴.۸)}$$

$$\frac{d\hat{a}_S}{dt} = \frac{۱}{i\hbar}[\hat{a}_S, \tilde{H}_{I۳W}] - \frac{\kappa_S}{۲}\hat{a}_S + \sqrt{\kappa_S}\hat{b}_{S,\text{in}}, \quad \text{(b۴۴.۸)}$$

روابط ورودی-خروجی نیز به‌صورت زیر هستند:

$$\hat{b}_{I,\text{out}} = \sqrt{\kappa_I}\hat{a}_I - \hat{b}_{I,\text{in}}, \qquad \hat{b}_{S,\text{out}} = \sqrt{\kappa_S}\hat{a}_S - \hat{b}_{S,\text{in}}.$$

با محاسبه کموتاتورها به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{d\hat{a}_I^\dagger}{dt} = \lambda \hat{a}_S - \frac{\kappa_I}{۲}\hat{a}_I^\dagger + \sqrt{\kappa_I}\hat{b}_{I,\text{in}}^\dagger, \quad \text{(a۴۵.۸)}$$

$$\frac{d\hat{a}_S}{dt} = \lambda \hat{a}_I^\dagger - \frac{\kappa_S}{۲}\hat{a}_S + \sqrt{\kappa_S}\hat{b}_{S,\text{in}}. \quad \text{(b۴۵.۸)}$$

جواب‌های حالت پایا به‌سادگی به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\hat{a}_S(t) = \frac{۲\lambda}{\kappa_S}\hat{a}_I^\dagger + \frac{۲}{\sqrt{\kappa_S}}\hat{b}_{S,\text{in}}, \quad \text{(a۴۶.۸)}$$

$$\hat{a}_I^\dagger(t) = \frac{۲\lambda}{\kappa_I}\hat{a}_S + \frac{۲}{\sqrt{\kappa_I}}\hat{b}_{I,\text{in}}^\dagger, \quad \text{(b۴۶.۸)}$$

که نتیجه می‌دهند:

$$\hat{a}_S(t) = \frac{۱}{۱ - \mathcal{Q}^۲}\frac{۴\lambda}{\kappa_S\sqrt{\kappa_I}}\hat{b}_{I,\text{in}}^\dagger(t) + \frac{۱}{۱ - \mathcal{Q}^۲}\frac{۲}{\sqrt{\kappa_S}}\hat{b}_{S,\text{in}}(t), \quad \text{(۴۷.۸)}$$

که در آن

$$\mathcal{Q} = \frac{۲\lambda}{\sqrt{\kappa_S \kappa_I}}.$$

با استفاده از رابطه

$$\hat{b}_{S,\text{out}} = \sqrt{\kappa_S}\hat{a}_S - \hat{b}_{S,\text{in}},$$

می‌توان میدان خروجی سیگنال را به‌صورت زیر نوشت:

$$\hat{b}_{S,\text{out}}(t) = \frac{۱ + \mathcal{Q}^۲}{۱ - \mathcal{Q}^۲}\hat{b}_{S,\text{in}}(t) + \frac{۲\mathcal{Q}}{۱ - \mathcal{Q}^۲}\hat{b}^{\dagger}_{I,\text{in}}(t). \quad (۴۸.۸)$$

می‌بینیم که مد آیدلر حتی زمانی که در حالت خلأ باشد نیز نویز اضافی تولید می‌کند؛ همان‌طور که در تحلیل رابطه (۱.۸) در تمرین ۸-۱ بحث شد.

فصل ۹

مروری بر کوانتیزه‌سازی کانونی

در این پیوست، ساخت هامیلتونی از لاگرانژی و همچنین فرمالیسم کوانتش کانونیِ دینامیک‌های کلاسیکِ پایسته، یعنی دینامیک‌های پایسته از نظر انرژی، را مرور می‌کنیم. برای جزئیات بیشتر، خواننده را به کتاب‌های تخصصی مکانیک کلاسیک، مانند مرجع [۱۴۵]، ارجاع می‌دهیم.

۹-۱ اصل کمترین کنش و ناوردایی پیمانه‌ای

کار را با یک فضای فاز شامل n متغیر مستقل $x_۱, \ldots, x_n$ آغاز می‌کنیم، به‌طوری‌که $\dot{x}_i = dx_i/dt$ و هر $x_i \in \mathbb{R}$ است. در یک مسئله مکانیکی، متغیرهای x_n , $\ldots$, $x_۱$ می‌توانند مکان‌های n ذره باشند. در حالت مدارهای الکتریکی، این متغیرها می‌توانند مجموعه‌ای از شارهای گره‌ای مستقل یا بارهای گره‌ای مستقل باشند. برای یک مدار الکتریکی، تا زمانی که بررسی کرده باشیم این متغیرها یک مجموعه مستقل را تشکیل می‌دهند، در انتخاب آن‌ها آزادی داریم.

فرض می‌کنیم لاگرانژی سیستم به‌صورت

$$\mathcal{L}(x_۱, \ldots, x_n, \dot{x}_۱, \ldots, \dot{x}_n)$$

داده شده باشد. برای سادگی، فرض می‌کنیم که $\mathcal{L}$ وابستگی صریح به زمان ندارد. برای یک سیستم مکانیکی عمومی، در غیاب میدان مغناطیسی، لاگرانژی برابر است با انرژی جنبشی T منهای انرژی پتانسیل U، یعنی

$$\mathcal{L}(x_۱, \ldots, x_n, \dot{x}_۱, \ldots, \dot{x}_n) = T(\dot{x}_۱, \ldots, \dot{x}_n) - U(x_۱, \ldots, x_n). \qquad (۹\text{-}۱)$$

با استفاده از لاگرانژی می‌توان کنش کلاسیکی را به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$S = \int_{t_۱}^{t_۲} dt\, \mathcal{L}(x_۱, \ldots, x_n, \dot{x}_۱, \ldots, \dot{x}_n). \qquad (۹\text{-}۲)$$

اصل کنش کمینه، یعنی $\delta S = ۰$، معادلات حرکت کلاسیکی را نتیجه می‌دهد. این معادلات، معادلات اویلر–لاگرانژ نامیده می‌شوند:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = ۰, \qquad \forall i = ۱, \ldots, n. \qquad (۹\text{-}۳)$$

بنابراین، ساختار لاگرانژی از معادلات دینامیکی کلاسیکی تعیین می‌شود و برعکس. با این حال، لاگرانژی یکتا نیست و می‌توان آن را با یک تبدیل پیمانه‌ای تغییر داد؛ یعنی

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \frac{df(x_۱, \ldots, x_n)}{dt}, \qquad (۹\text{-}۴)$$

که در آن $f(x_۱, \ldots, x_n)$ یک تابع دلخواه است، بدون آن‌که معادلات حرکت تغییر کنند. روشن است که چنین تغییری کنش را به‌صورت

$$S \to S + f(t_۲) - f(t_۱)$$

تبدیل می‌کند؛ و این تغییر واقعاً مسیری را که کنش را کمینه می‌کند، عوض نمی‌کند.

تمرین آ.۱.۱

نشان دهید که معادله (۹-۳) از رابطه

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x_i} = ۰$$

به‌دست می‌آید، اگر داشته باشیم

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{df(x_۱, \ldots, x_n)}{dt}.$$

برای این کار از رابطه

$$\frac{df}{dt} = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\dot{x}_j$$

استفاده کنید، زیرا تابع f فقط به متغیرهای $x_۱, \ldots, x_n$ وابسته است.

پاسخ تمرین آ.۱.۱

ابتدا داریم:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left(\frac{df}{dt}\right) = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

پس

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left(\frac{df}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_j \frac{\partial^۲ f}{\partial x_j \partial x_i}\dot{x}_j.$$

از طرف دیگر:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{df}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\dot{x}_j\right) = \sum_j \frac{\partial^۲ f}{\partial x_i \partial x_j}\dot{x}_j.$$

چون مشتق‌های جزئی مرتبه دوم جابه‌جاپذیر هستند، یعنی

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^۲ f}{\partial x_i \partial x_j},$$

نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left(\frac{df}{dt}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{df}{dt}\right) = ۰.$$

بنابراین جمله‌ی اضافه‌شده به لاگرانژی، یعنی

$$\frac{df}{dt},$$

هیچ سهمی در معادلات اویلر–لاگرانژ ندارد و در نتیجه لاگرانژی‌های

$$\mathcal{L} \qquad \text{و} \qquad \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{df}{dt}$$

معادلات حرکت یکسانی تولید می‌کنند.

۲-۹ تبدیل لژاندر: هامیلتونی

برای تعریف هامیلتونی، برای هر متغیر مستقل x_i، یک متغیر مزدوج p_i معرفی می‌شود که به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}. \qquad (\text{A.۵})$$

برای یک سیستم مکانیکی ساده که انرژی جنبشی آن به‌صورت

$$T = \sum_i \frac{m_i \dot{x}_i^{۲}}{۲}$$

داده شده است، متغیرهای مزدوج همان تکانه‌ها هستند و داریم:

$$p_i = m_i \dot{x}_i.$$

اکنون می‌توان یک تابع جدید، یعنی هامیلتونی، تعریف کرد. این تابع به متغیرهای $\{x_i\}$ و مزدوج‌های آن‌ها $\{p_i\}$ وابسته است، اما دیگر به $\{\dot{x}_i\}$ وابسته نیست. به‌طور دقیق‌تر، هامیلتونی $\mathcal{H}(x_۱, \ldots, x_n, p_۱, \ldots, p_n)$ به‌صورت تبدیل لژاندر لاگرانژی تعریف می‌شود؛ یعنی

$$\mathcal{H}(x_۱, \ldots, x_n, p_۱, \ldots, p_n) = \sup_{\dot{x}_۱, \ldots, \dot{x}_n} \left[\sum_{i=۱}^{n} p_i \dot{x}_i - \mathcal{L}(x_۱, \ldots, x_n, \dot{x}_۱, \ldots, \dot{x}_n) \right]. \qquad (\text{A.۶})$$

وقتی $\mathcal{L}(x_۱, \ldots, x_n, \dot{x}_۱, \ldots, \dot{x}_n)$ یک تابع محدب نسبت به متغیرهای $\dot{x}_۱, \ldots, \dot{x}_n$ باشد، سوپریمم در رابطه (A.۶) در یک نقطه یکتا $\dot{x}_۱^{\sup}, \ldots, \dot{x}_n^{\sup}$ رخ می‌دهد؛ زیرا عبارت

$$\sum_i p_i \dot{x}_i - \mathcal{L}$$

نسبت به $\dot{x}_i$ مقعر است. در این نقطه سوپریمم داریم:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left[\sum_{i=۱}^{n} p_i \dot{x}_i - \mathcal{L}(x_۱, \ldots, x_n, \dot{x}_۱, \ldots, \dot{x}_n) \right] = ۰ \quad \Longrightarrow \quad p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}, \qquad \forall i. \qquad (\text{A.۷})$$

بنابراین می‌توان هامیلتونی رابطه (A.۶) را با تعیین p_i و حل کردن آن بر حسب $\dot{x}_i$ به‌دست آورد، به‌طوری‌که متغیرهای $\dot{x}_i$ از $\mathcal{H}$ حذف شوند.

به‌عنوان مثال، حالت کلی‌ای را در نظر می‌گیریم که در آن لاگرانژی اولیه دارای انرژی جنبشی درجه‌دو، اما احتمالاً غیرقطری، است. اگر

$$x = (x_۱, \ldots, x_n)^T$$

باشد، لاگرانژی به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{۱}{۲} \dot{x}^T C \dot{x} - U(x) = \frac{۱}{۲} \sum_{i,j=۱}^{n} C_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - U(x_۱, \ldots, x_n), \qquad (\text{A.۸})$$

که در آن ماتریس C متقارن است و فرض می‌کنیم $C > ۰$، یعنی همه مقدارهای ویژه آن $d_i > ۰$، برای $i = ۱, \ldots, n$، مثبت هستند. در این حالت داریم:

$$p = C\dot{x},$$

پس در نقطه سوپریمم:

$$\dot{x} = C^{-۱} p.$$

با جایگذاری این رابطه در (A.۶)، به‌صورت فشرده به دست می‌آوریم:

$$\mathcal{H}(x,p) = \frac{۱}{۲} p^T C^{-۱} p + U(x). \qquad (\text{A.۹})$$

در تحلیلی دیگر از همین مسئله، می‌توانستیم ابتدا به متغیرهای مستقل جدید

$$y = Sx$$

برویم، که در آن S ماتریسی است که C را قطری می‌کند. در این صورت خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}(y,\dot{y}) = \frac{۱}{۲} \dot{y}^T D \dot{y} - \underbrace{U(S^{-۱} y)}_{\tilde{U}(y)} = \frac{۱}{۲} \sum_{i=۱}^{n} d_i \dot{y}_i^۲ - \tilde{U}(y_۱, \ldots, y_n), \qquad (\text{A.۱۰})$$

که در آن $D = S^T C S$ یک ماتریس قطری با درایه‌های قطری d_i است. فقط پس از این مرحله می‌توانستیم متغیر مزدوج را به‌صورت

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = D\dot{y}$$

معرفی کنیم. در نتیجه:

$$\mathcal{H}(y,p) = \frac{۱}{۲} p^T D^{-۱} p + \tilde{U}(y) = \sum_{i=۱}^{n} \frac{p_i^۲}{۲ d_i} + \tilde{U}(y_۱, \ldots, y_n). \qquad (\text{A.۱۱})$$

بررسی حالتی که در آن $C \geq ۰$ باشد نیز آموزنده است. این بدان معناست که برخی از مقدارهای ویژه d_i ماتریس C صفر هستند؛ در نتیجه، ماتریس C وارون‌پذیر نخواهد بود. در این حالت، متغیر متناظر y_i، با $d_i = ۰$، فقط در پتانسیل $\tilde{U}$ ظاهر می‌شود. چنین حالت‌هایی را می‌توان در مکانیک کلاسیک با این نکته حل کرد که همه مختصات y_i که سهمی در انرژی جنبشی ندارند، باید در مقداری قرار گیرند که

$$\frac{\partial \tilde{U}(y_۱, \ldots, y_n)}{\partial y_i} = ۰$$

باشد؛ زیرا این همان معادله اویلر-لاگرانژ برای آن مختصات است. وقتی پتانسیل محدب باشد، این پیکربندی همان حالتی است که انرژی پتانسیل $\tilde{U}(y_۱, \ldots, y_n)$ را کمینه می‌کند. به‌طور کلی‌تر، این مقدارها در یک کمینه موضعی قرار داده می‌شوند.[۱]

تمرین آ.۲.۱

لاگرانژی یک ذره نسبیتی با جرم m و مختصات فضایی

$$x = (x_۱, x_۲, x_۳)$$

به‌صورت زیر است:

$$\mathcal{L} = -mc^۲ \sqrt{۱ - \frac{\sum_{i=۱}^{۳} \dot{x}_i^۲}{c^۲}} - U(x_۱, x_۲, x_۳),$$

که در آن c سرعت نور است و $U(x_۱, x_۲, x_۳)$ یک پتانسیل دلخواه است. نشان دهید که $\mathcal{L}$ نسبت به $\dot{x}_i$ محدب است و هامیلتونی را به‌دست آورید.

[۱] بیشینه‌های موضعی وقتی d_i فقط اندکی غیرصفر باشد، ناپایدار هستند.

پاسخ تمرین آ.۲.۱

با رسم تابع

$$f(x) = -\sqrt{1 - x^2}, \qquad -1 \leq x \leq 1,$$

می‌توان دید که $f(x)$ محدب است؛ بنابراین $\mathcal{L}$ نیز محدب خواهد بود. تکانه نسبیتی به‌صورت زیر است:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

یا به‌طور معادل:

$$\sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i^2 = v^2 = \frac{p^2}{m^2 + p^2/c^2}.$$

پس هامیلتونی برابر است با:

$$\mathcal{H} = \frac{mv^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} + U(x_1, x_2, x_3),$$

و در نهایت:

$$\mathcal{H} = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} + U(x_1, x_2, x_3).$$

در بسیاری از موقعیت‌های فیزیکی، لاگرانژی به‌صورت صریح به زمان وابسته است؛ یعنی

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, t).$$

برای مثال، پتانسیلی را در نظر بگیرید که با افزودن یک نیروی محرک زمان‌وابسته

$$F(t) = A\cos(\omega t)$$

به یک سیستم جرم–فنر با مکان x ایجاد می‌شود. در این حالت، پتانسیل برابر است با:

$$U(x) = \frac{1}{2}Kx^2 - F(t)x,$$

که متناظر با نیروی کل زیر است:

$$F_{\text{tot}}(t) = -\frac{\partial U}{\partial x} = -Kx + F(t).$$

در چنین حالتی، وقتی وابستگی صریح به زمان در انرژی پتانسیل U ظاهر شود، این وابستگی به‌سادگی به هامیلتونی $\mathcal{H}(t)$ منتقل می‌شود. برای مثال، برای سیستم جرم–فنرِ رانده‌شده داریم:

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}Kx^2 - F(t)x.$$

از سوی دیگر، وقتی وابستگی صریح به زمان روی انرژی جنبشی اثر بگذارد، این وابستگی از طریق مشتق زمانی کل d/dt وارد معادله اویلر–لاگرانژ، یعنی رابطه (۹-۳)، می‌شود. برای مثال، یک سیستم مکانیکی با جرم زمان‌وابسته $m(t)$ و پتانسیل $U(x)$، از معادله اویلر–لاگرانژ زیر پیروی می‌کند:

$$m(t)\ddot{x} + \dot{x}\dot{m} = \frac{\partial U}{\partial x}.$$

علاوه بر این، وقتی از توصیف لاگرانژی به توصیف هامیلتونی می‌رویم، چنین وابستگی زمانی‌ای می‌تواند وارد تعریف متغیرهای مزدوج شود و از این راه، تعریف هامیلتونی را زمان‌وابسته کند. برای مثال، هنگام بررسی شارهای زمان‌وابسته، بار مزدوج در رابطه (۲-۸۰) از بخش(۲-۶)، از طریق

$$\Phi_{\text{ext}}(t)$$

به‌صورت صریح زمان‌وابسته است. برای متغیرهای مزدوجی که زمان‌وابسته هستند، یعنی زمانی که زمان صرفاً یک پارامتر کلاسیکی است، همچنان می‌توان کروشه پواسون را مانند رابطه (A.۱۲) نوشت و کوانتش را اعمال کرد.

۳-۹ کروشه‌ی پواسون و کوانتیزه‌سازی

با استفاده از متغیرهای مزدوج، می‌توان برای دو تابع $f(x,p)$ و $g(x,p)$، کروشه پواسون را به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}\right]. \qquad (\text{A.۱۲})$$

از این تعریف نتیجه می‌شود که:

$$\{x_i,p_j\} = \delta_{ij}, \qquad \{x_i,x_j\} = \{p_i,p_j\} = 0. \qquad (\text{A.۱۳})$$

همچنین می‌توان کروشه پواسون را به تابع هامیلتونیِ تعریف‌شده در رابطه (A.۶) اعمال کرد و به‌دست آورد:

$$\{x_i,\mathcal{H}\} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dot{x}_i. \qquad (\text{A.۱۴})$$

یعنی کروشه پواسون با هامیلتونی، دینامیک زمانی سیستم را تعیین می‌کند. تساوی آخر از نحوه تعریف $\mathcal{H}$ به‌عنوان تابعی از p_i به‌دست می‌آید. به‌طور مشابه داریم:

$$\{p_i,\mathcal{H}\} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} = \dot{p}_i, \qquad (\text{A.۱۵})$$

که در آن از رابطه

$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}$$

استفاده کرده‌ایم. در تساوی آخر نیز از معادله اویلر–لاگرانژ و تعریف p_i استفاده شده است. روابط (A.۱۴) و (A.۱۵) به معادلات هامیلتون معروف هستند.

کوانتش به این معناست که متغیرهای مزدوج کلاسیکی $x_i \in \mathbb{R}$ و $p_j \in \mathbb{R}$ را به عملگرها ارتقا می‌دهیم:

$$x_i \to \hat{x}_i, \qquad p_j \to \hat{p}_j, \qquad \mathcal{H} \to H.$$

پل دیراک این ایده را مطرح کرد که به دلیل شباهت زیاد کروشه پواسون و کموتاتور، کروشه پواسون باید با کموتاتور جایگزین شود. این نگاشت به‌صورت زیر است:

$$\{f,g\} \to \frac{1}{i\hbar}[\hat{f},\hat{g}]. \qquad (\text{A.۱۶})$$

این رابطه مستقیماً رابطه کموتاسیون کانونی را نتیجه می‌دهد:

$$[\hat{x}_i,\hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}\mathbb{1}. \qquad (\text{A.۱۷})$$

این نتیجه از رابطه (A.۱۳) به‌دست می‌آید. علاوه بر این، کوانتش رابطه (A.۱۴) می‌دهد:

$$[\hat{x}_i(t),H] = i\hbar\frac{d\hat{x}_i(t)}{dt},$$

که در آن $\hat{x}_i(t)$ عملگر هایزنبرگِ تحول‌یافته در زمان است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{x}_i(t) = e^{iHt/\hbar}\hat{x}_i e^{-iHt/\hbar}.$$

تمرین ۱.۳A.

برای یک میدان اسکالر پیوسته از متغیرهای $\xi(x_\mu)$ که به مختصات فضا-زمان

$$x_\mu = (t, x, y, z)$$

وابسته است، کنش غیرنسبیتی برابر است با:

$$S = \int d^3x \int dt\, \mathcal{L}\left(\xi(x_\mu), \frac{\partial \xi}{\partial x_\mu}\right).$$

نشان دهید که اصل کنش کمینه برای پیکربندی میدان $\xi(x_\mu)$، یعنی

$$\frac{\delta S}{\delta \xi(x_\mu)} = 0,$$

ایجاب می‌کند که $\xi(x_\mu)$ از معادله حرکت زیر پیروی کند:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \xi}{\partial x_\mu}\right)} = 0. \qquad (18A.)$$

توضیح: منظور از غیرنسبیتی این است که بین x_μ و x^μ تمایزی قائل نمی‌شویم؛ در حالی که معمولاً این دو با رابطه

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu$$

به هم مربوط می‌شوند، که در آن جمع روی اندیس‌های تکراری در نظر گرفته می‌شود و $g_{\mu\nu}$ متریک است. همچنین کنشی که در اینجا نوشته شده است، به‌صورت آشکار ناوردای لورنتسی نیست.

پاسخ تمرین آ.۱.۳

اگر میدان را به‌صورت موضعی تغییر دهیم، یعنی:

$$\xi'(x_\mu) = \xi(x_\mu) + \delta\xi(x_\mu),$$

آنگاه داریم:

$$S' = \int d^3x \int dt\, \mathcal{L}\left(\xi(x_\mu) + \delta\xi, \frac{\partial(\xi + \delta\xi)}{\partial x_\mu}\right).$$

با بسط این رابطه تا مرتبه اول نسبت به $\delta\xi$، نتیجه می‌شود:

$$S' = S + \int d^3x \int dt \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi}\delta\xi + \sum_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \xi}{\partial x_\mu}\right)}\frac{\partial(\delta\xi)}{\partial x_\mu}\right].$$

اکنون با جزءبه‌جزء کردن جمله آخر، و با فرض این‌که $\delta\xi$ و همچنین $\xi(x_\mu)$ روی مرزهای مختصات فضا-زمان صفر می‌شوند، داریم:

$$\delta S = \int d^3x \int dt\, \delta\xi(x_\mu)\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} - \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \xi}{\partial x_\mu}\right)}\right].$$

بنابراین، چون باید

$$\delta S = 0$$

برای هر تغییر دلخواه $\delta\xi(x_\mu)$ برقرار باشد، عبارت داخل کروشه باید صفر شود. در نتیجه به رابطه (۱۸A.) می‌رسیم.

فصل ۱۰

سیستم‌های هماهنگ و فراتر از آن

در این پیوست، بررسی می‌کنیم که چگونه می‌توان مُدهای نرمالِ ناهم‌بسته را از یک لاگرانژی کلاسیکِ شامل مُدهای کوپل‌شده در یک پتانسیل درجه دو استخراج کرد. چنین لاگرانژی‌هایی که متناظر با سیستم‌های «خطی» هستند، یعنی سیستم‌هایی که معادلات حرکت آن‌ها خطی است، در QED مداری بسیار رایج‌اند. اگر انرژی پتانسیل، شامل بسطی چندجمله‌ای بر حسب درجات آزادی باشد و جمله‌های فراتر از پتانسیل درجه‌دو ضعیف باشند، می‌توان ابتدا سیستم هارمونیک را حل کرد و سپس جمله‌های غیرخطی باقی‌مانده در پتانسیل را بر حسب مُدهای نرمالِ سیستم هارمونیک بیان نمود.

در بخش ۱۰-۲ از این بحث فراتر می‌رویم و تقریب بورن-اوپنهایمر را بررسی می‌کنیم. این تقریب به ما اجازه می‌دهد متغیرهای «فرکانس بالا» یا «سریع» را حذف کنیم تا بتوانیم روی به‌دست‌آوردن دینامیک مؤثرِ کم‌انرژی با تعداد کمتری از درجات آزادی تمرکز کنیم. همچنین می‌توان از این روش برای حذف درجات آزادی‌ای در لاگرانژی استفاده کرد که انرژی جنبشی بسیار ناچیزی دارند؛ یعنی در حالتی که ظرفیت خازنی یا «جرم» به سمت صفر میل می‌کند.

۱۰-۱ مدهای نرمال یک سیستم هماهنگ

ابتدا با استفاده از یک تمرین ساده نشان می‌دهیم که هر وابستگی خطی در انرژی پتانسیل نسبت به متغیرهای x_i را می‌توان با تغییر متغیرها، در یک وابستگی درجه دو جذب کرد.

تمرین ب.۱.۱

یک لاگرانژی مستقل از زمان $\mathcal{L}(x,\dot{x})$ را با پتانسیل زیر در نظر بگیرید:

$$U(x) = a^T x + \frac{1}{2} x^T K x, \qquad (\text{B.1})$$

که در آن $K > 0$ یک ماتریس متقارن و a یک بردار حقیقی دلخواه است. نشان دهید که چگونه می‌توان این پتانسیل را، تا یک ثابت، با استفاده از تغییر متغیر

$$x' = x + b$$

برای یک b مناسب، به‌صورت زیر نوشت:

$$U'(x') = \frac{1}{2} x'^T K x'. \qquad (\text{B.2})$$

پاسخ تمرین ب.۱.۱

تبدیل

$$x' = x + b$$

را انجام می‌دهیم؛ بنابراین

$$\dot{x}' = \dot{x}.$$

با انتخاب

$$b = K^{-۱}a$$

و با استفاده از این واقعیت که K وارون‌پذیر و متقارن است، جمله خطی حذف می‌شود. سپس جمله ثابت

$$\frac{۱}{۲}b^T b$$

را کنار می‌گذاریم.

اکنون حالتی را در نظر بگیرید که لاگرانژی $\mathcal{L}$ دارای وابستگی خطی به $\dot{x}$ باشد؛ یعنی

$$\mathcal{L} = \frac{۱}{۲}\dot{x}^T C\dot{x} + a^T\dot{x} - U(x), \tag{۳B.}$$

که در آن $U(x)$ دلخواه است. با انتخاب

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} - a^T\dot{x},$$

یا به‌طور معادل، با انتخاب

$$f(x_۱, \ldots, x_n) = -\sum_i a_i x_i$$

در رابطه (۹-۴)، می‌توان چنین وابستگی‌ای را به‌طور کامل با یک تبدیل پیمانه‌ای حذف کرد.

بنابراین، به‌جز حالت‌های خاص، برای مثال زمانی که a در رابطه (.۳B) به‌صورت صریح به زمان وابسته باشد، یا زمانی که میدان‌های مغناطیسی یا ژیراتورها در سیستم حضور داشته باشند، می‌توانیم فرض کنیم که لاگرانژی به شکل زیر است:

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{۱}{۲}\dot{x}^T C\dot{x} - U(x). \tag{۴B.}$$

فرض می‌کنیم پتانسیل به‌صورت زیر باشد:

$$U(x) = \frac{۱}{۲}\sum_{i,j} K_{ij}x_i x_j + U_{\mathrm{nl}}(x_۱, \ldots, x_n), \tag{۵B.}$$

که در آن $K \geq ۰$ است و U_{nl} یک چندجمله‌ای مرتبه بالاتر، یعنی مکعبی یا بالاتر، بر حسب متغیرهای x_i است. بنابراین فرض می‌کنیم که پتانسیل $U(x)$ را می‌توان به‌صورت یک چندجمله‌ای بر حسب متغیرهای x_i بسط داد و همچنین فرض می‌کنیم که هر بخش خطی آن را با تغییر متغیرها حذف کرده‌ایم.

۱۰-۱-۱ قطری‌سازی

اگر U_{nl} در رابطه (.۵B) صفر باشد، سیستم هارمونیک است. در این حالت نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان متغیرهای x و $\dot{x}$ را به‌گونه‌ای تبدیل کرد که مجموعه‌ای از نوسان‌گرهای هارمونیکِ ناهم‌بسته را نمایش دهند؛ به‌طوری‌که هرکدام دارای فرکانس تشدید ω_i باشند، همان‌طور که در رابطه (.۱۰B) دیده می‌شود. این تغییر متغیر مناسب را در سطح

لاگرانژی انجام می‌دهیم تا نیازی نباشد نگران حفظ روابط کموتاسیون کانونی باشیم؛ زیرا این روابط هنگام تعریف متغیرهای مزدوج به‌صورت خودکار اعمال خواهند شد.

می‌توانیم بخش درجه‌دوی لاگرانژی را به‌صورت فشرده به شکل زیر بنویسیم:

$$\mathcal{L}_{\text{lin}}(x, \dot{x}) = \frac{۱}{۲}\dot{x}^T C \dot{x} - \frac{۱}{۲}x^T K x. \tag{B.۶}$$

معادله اویلر-لاگرانژ، یعنی رابطه (۹-۳)، که متناظر با لاگرانژی $\mathcal{L}_{\text{lin}}$ در رابطه (B.۶) است، به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$C\frac{d^۲ x}{dt^۲} = -Kx \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^۲ x}{dt^۲} = -C^{-۱}Kx, \tag{B.۷}$$

و این رابطه آشکارا نسبت به متغیرها خطی است؛ از همین‌رو به چنین سیستم‌هایی، سیستم‌های خطی یا هارمونیک گفته می‌شود.

حل رابطه (B.۷) معادل قطری‌سازی ماتریس $C^{-۱}K$ است. توجه می‌کنیم که $C^{-۱}K$ لزوماً متقارن نیست. برای قطری‌سازی $C^{-۱}K$، از قضیه زیر استفاده می‌کنیم.

قضیه ب.۱.۱

فرض کنید A و B، ماتریس‌های حقیقی، متقارن و $n \times n$ باشند.

۱. اگر $A > ۰$ باشد، آنگاه یک ماتریس حقیقی، غیرتکین و $n \times n$ به نام S وجود دارد، به‌طوری‌که:

$$A = SS^T,$$

و

$$B = (S^{-۱})^T \Lambda S^{-۱},$$

که در آن Λ یک ماتریس قطری حقیقی است.

۲. اگر $A > ۰$ باشد، آنگاه AB قطری‌پذیر است و ماتریس قطری آن برابر با Λ خواهد بود.

اثبات

ماتریس A مثبت معین است؛ بنابراین یک ماتریس متعامد O_A وجود دارد که A را قطری می‌کند، یعنی:

$$O_A^T A O_A = D,$$

که در آن D یک ماتریس قطری با درایه‌های قطری مثبت است. با تعریف ماتریس

$$T = O_A D^{۱/۲},$$

داریم:

$$T^{-۱}A(T^{-۱})^T = ۱.$$

ماتریس $T^T BT$ حقیقی و متقارن است؛ بنابراین این ماتریس نیز می‌تواند توسط یک ماتریس متعامد O قطری شود:

$$O^T T^T BTO = \Lambda.$$

حال با تعریف ماتریس غیرتکین

$$S = TO,$$

می‌بینیم که:

$$S^{-۱}A(S^{-۱})^T = \mathbf{۱},$$

و

$$S^T BS = \Lambda.$$

وارون‌گیری از روابط قبلی، اثبات بخش اول قضیه را کامل می‌کند. بخش دوم مستقیماً از بخش اول نتیجه می‌شود. در واقع، می‌توان نوشت:

$$A = SS^T, \qquad B = (S^{-۱})^T \Lambda S^{-۱},$$

و از این‌جا به‌دست می‌آوریم:

$$AB = S\Lambda S^{-۱}.$$

□

علاوه بر این، می‌توان نشان داد که اگر $B \geq ۰$ باشد، آنگاه Λ دارای مقدارهای ویژه نامنفی است؛ و اگر $B > ۰$ باشد، مقدارهای ویژه Λ مثبت خواهند بود. اثبات این نتیجه را در اینجا نمی‌آوریم. در مسئله ما، ماتریس‌های

$$C^{-۱}(= A) \qquad \text{و} \qquad K(= B)$$

فرض‌های قضیه ب.۱.۱ را برآورده می‌کنند. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\Lambda = \omega^۲,$$

که دارای مقدارهای ویژه نامنفی است. اگر S ماتریسی باشد که $C^{-۱}K$ را قطری می‌کند، آنگاه داریم:

$$S^{-۱}C^{-۱}KS = \Lambda, \tag{B.۸}$$

و همچنین:

$$C^{-۱} = \frac{SS^T}{C_۰},$$

که در آن $C_۰ > ۰$ یک پارامتر دلخواه با همان بُعد درایه‌های C است. این پارامتر را وارد می‌کنیم تا S بدون بُعد باشد. توجه کنید که چون $C^{-۱}K$ لزوماً متقارن نیست، ماتریس S نیز لزوماً متعامد نیست؛ هرچند باید وارون‌پذیر باشد. همچنین اگر K رتبه کامل نداشته باشد، یعنی پتانسیل درجه‌دو در برخی جهت‌ها تخت باشد، مقدارهای ویژه صفر متناظر در Λ ظاهر خواهند شد.

اکنون متغیرهای جدیدِ مُد نرمال را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X = S^{-۱}x. \tag{B.۹}$$

با استفاده از ویژگی‌های قضیه ب.۱.۱، بخش درجه‌دوی لاگرانژی در رابطه (B.۶) را می‌توان بر حسب متغیرهای مُد نرمال X به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathcal{L}_{\text{lin}}(X, \dot{X}) = \frac{C_۰}{۲}\dot{X}^T\dot{X} - \frac{C_۰}{۲}X^T\Lambda X = \sum_{i=۱}^{n}\left[\frac{C_۰}{۲}\dot{X}_i^۲ - \frac{C_۰}{۲}\omega_i^۲X_i^۲\right], \tag{B.۱۰}$$

که همان لاگرانژی مجموعه‌ای از نوسانگرهای هارمونیک ناهم‌بسته با فرکانس‌های تشدید ω_i است.

با تعریف متغیرهای مزدوجِ این مُدهای نرمال به‌صورت:

$$P = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}} = C_۰\dot{X}, \tag{B.۱۱}$$

بلافاصله هامیلتونی را نیز بر حسب مُدهای نرمال به‌دست می‌آوریم:

$$\mathcal{H}(X,P)=\frac{۱}{۲C.}P^TP+\frac{۱}{۲}C.X^T\Lambda X. \qquad (\text{B.}۱۲)$$

کوانتش نتیجه می‌دهد که:

$$[\hat{X}_i,\hat{P}_j]=i\hbar\delta_{ij}.$$

با معرفی عملگرهای نابودی:

$$\hat{a}_i=\sqrt{\frac{C.\omega_i}{۲\hbar}}\left(\hat{X}_i+\frac{i}{C.\omega_i}\hat{P}_i\right),$$

و با داشتن رابطه:

$$[\hat{a}_i,\hat{a}_j^\dagger]=\delta_{ij}\mathbf{۱},$$

می‌توان هامیلتونی کوانتیده‌شده را به‌صورت زیر نوشت:

$$H=\sum_{i=۱}^{n}\hbar\omega_i\left(\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i+\frac{۱}{۲}\right). \qquad (\text{B.}۱۳)$$

اکنون می‌توانیم جمله غیرخطی را مستقیماً وارد هامیلتونی کلاسیکی کنیم. با استفاده از مُدهای نرمال و تکانه‌های مزدوج آن‌ها داریم:

$$\mathcal{H}(X,P)=\frac{۱}{۲C.}P^TP+\frac{۱}{۲}C.X^T\Lambda X+U_{\text{nl}}(SX). \qquad (\text{B.}۱۴)$$

با استفاده از رابطه:

$$\hat{X}_i=\sqrt{\frac{\hbar}{۲C.\omega_i}}\left(\hat{a}_i+\hat{a}_i^\dagger\right),$$

می‌توان غیرخطی‌بودن

$$U_{\text{nl}}\left(\sum_j S_{ij}X_j\right)$$

را بر حسب عملگرهای خلق و نابودی نوشت. همچنین برای کاربرد این روش قطری‌سازی در کوانتش جعبه‌سیاه در QED مداری، به بخش ۵-۲ و پیوست ۱۰-۳ مراجعه کنید.

۲-۱۰ حذف مدهای پُرفرکانس

پس از آن‌که مُدهای نرمال یک سیستم را تعیین کردیم، فرض می‌کنیم که برای زیرمجموعه‌ای از مُدها، فرکانس‌های ω_i بسیار بزرگ‌تر از فرکانس سایر مُدها هستند. این مُدها را می‌توان مُدهای پرانرژی $X_{i,\text{high}}$ نامید؛ در مقابل، مُدهای کم‌انرژی را $X_{i,\text{low}}$ می‌نامیم. سپس، به‌عنوان یک تقریب بسیار ساده، می‌توان این مُدهای پرانرژی را مستقیماً در حالت خلأ پایه‌شان قرار داد و عملگرهای $X_{i,\text{high}}$ و $P_{i,\text{high}}$ را با گرفتن مقدار چشم داشتی نسبت به حالت خلأ جایگزین کرد. در نتیجه، در یک فضای هیلبرت کاهش‌یافته کار می‌کنیم که فقط شامل مُدهای کم‌انرژی باقی‌مانده است. البته چنین جایگذاری‌ای روی جمله غیرخطی $U_{\text{nl}}(SX)$ در رابطه (B.۵) نیز اثر می‌گذارد و آن را به نوعی غیرخطی‌بودن روی مُدهای باقی‌مانده‌ی «فعال» کاهش می‌دهد. در این رویکرد ساده، اثر غیرخطی‌بودن در تعیین فرکانس‌های مُدهای پرانرژی یا کم‌انرژی لحاظ نمی‌شود.

یک تقریب دقیق‌تر که با نام تقریب بورن-اوپنهایمر شناخته می‌شود، به‌صورت زیر است. این تقریب در فیزیک مولکولی استفاده می‌شود؛ جایی که متغیرهای «سریع» و پرانرژی، یعنی متغیرهای با جرم سبک، درجات آزادی حرکتی الکترون‌ها هستند و متغیرهای کند و سنگین، مربوط به هسته‌ها می‌شوند. در ادامه، این روش را به حالت

نوسانگرهای هارمونیک کوپل‌شده به یک پتانسیل غیرخطی تعمیم می‌دهیم. ابتدا مجموعه‌ای از مُدهای کم‌فرکانس با موقعیت‌های $\{X_{i,\mathrm{low}}\}$ و مُدهای پرفرکانسی که قرار است حذف شوند، با موقعیت‌های $\{X_{i,\mathrm{high}}\}$ را مشخص می‌کنیم. سپس به لاگرانژی بازمی‌گردیم؛ لاگرانژی‌ای که با اعمال رابطه (۹B.) به رابطه (۵B.) و جمع‌آوری جمله خطی در رابطه (۱۰B.) به‌دست می‌آید:

$$\mathcal{L}(X,\dot{X}) = \frac{C_۰}{۲}\dot{X}^T\dot{X} - \frac{C_۰}{۲}X^T\omega^۲ X - U_{\mathrm{nl}}(SX). \qquad (۱۵B.)$$

این لاگرانژی را تا مرتبه دوم نسبت به متغیرهای $X_{i,\mathrm{high}}$ بسط می‌دهیم، در حالی که تمام وابستگی‌ها به $X_{j,\mathrm{low}}$ را نگه می‌داریم:

(۱۶B.)

$$U_{\mathrm{nl}}(SX) = \sum_j c_j(\{X_{i,\mathrm{low}}\})\, X_{j,\mathrm{high}} + \frac{۱}{۲}X_{\mathrm{high}}^T N(\{X_{i,\mathrm{low}}\})\, X_{\mathrm{high}} + \tilde{U}_{\mathrm{nl}}(\{X_{i,\mathrm{low}}\}) + O\big(|X_{\mathrm{high}}|^۳\big)\,,$$

که در آن $c_j(\{X_{i,\mathrm{low}}\})$ ضرایبی هستند که به $X_{i,\mathrm{low}}$ وابسته‌اند. در اینجا همه جمله‌هایی را که فقط به $X_{i,\mathrm{low}}$ وابسته‌اند، در $\tilde{U}_{\mathrm{nl}}(\{X_{i,\mathrm{low}}\})$ جمع کرده‌ایم. بنابراین، «موقعیت‌های» مُدهای کم‌فرکانس، یعنی مُدهای کند، برای مُدهای پرفرکانس یا سریع یک پتانسیل ایجاد می‌کنند. با این بسط، شکل لاگرانژی برای بردار متغیرهای X_{high} مانند یک سیستم هارمونیک است؛ زیرا جمله خطی نسبت به X_{high} را می‌توان طبق تمرین ۱B. به یک جمله درجه دو تبدیل کرد، البته با فرض این‌که ماتریس متقارن N وارون‌پذیر باشد. به‌طور کلی‌تر، در تقریب بورن-اوپنهایمر، مسئله حالت پایه برای متغیرهای پرانرژی حل می‌شود؛ حتی اگر آن سیستم لزوماً هارمونیک نباشد.

اگر وابستگی‌های مرتبه بالاتر نسبت به X_{high} را نادیده بگیریم، می‌توانیم لاگرانژی مربوط به مُدهای پرانرژی را قطری کنیم و شکلی مانند رابطه (۱۰B.) به‌دست آوریم. در این حالت، فرکانس‌های $\tilde{\omega}_k$ مُدهای پرانرژیِ جدید و ناهم‌بسته، به X_{low} وابسته خواهند بود. سپس وقتی این مُدهای پرفرکانس را در حالت پایه‌شان قرار دهیم، انرژی خلأ آن‌ها به‌صورت

$$\frac{۱}{۲}\sum_{k,\mathrm{high}} \hbar\tilde{\omega}_k\Big(\{\hat{X}_{i,\mathrm{low}}\}\Big)$$

در هامیلتونی ظاهر می‌شود. بنابراین هامیلتونی نهایی در این تقریب به‌صورت زیر است:

$$H \approx \sum_{i,\mathrm{low}} \hbar\omega_i\left(\hat{a}^\dagger_{i,\mathrm{low}}\hat{a}_{i,\mathrm{low}} + \frac{۱}{۲}\right) + \frac{۱}{۲}\sum_{k,\mathrm{high}} \hbar\tilde{\omega}_k\Big(\{\hat{X}_{i,\mathrm{low}}\}\Big) + \tilde{U}_{\mathrm{nl}}\Big(\{\hat{X}_{i,\mathrm{low}}\}\Big)\,. \qquad (۱۷B.)$$

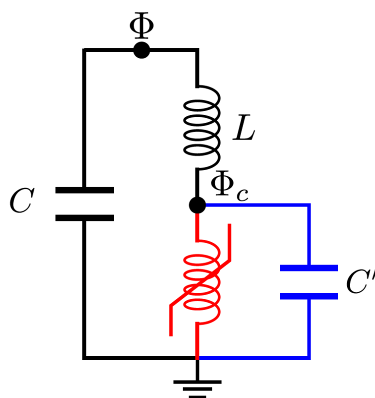
در این رابطه، جمله اول از دو جمله اول رابطه (۱۵B.) و فقط برای متغیرهای $X_{i,\mathrm{low}}$ همراه با عملگرهای متناظرشان $\hat{a}_{i,\mathrm{low}}$ به‌دست می‌آید. بنابراین مُدهای پرانرژی حذف می‌شوند و یک کوپلینگ مؤثر، و به‌طور کلی غیرخطی، بین مُدهای کم‌انرژی‌ای که پیش‌تر از هم جدا بودند، ایجاد می‌کنند. این روش برای تحلیل مدارهای الکتریکی در مرجع [۱۴۶] استفاده شده است.

۱۰-۲-۱ نمایشی از روش بورن-اوپنهایمر

اکنون به سراغ یک مثال ساده می‌رویم که کاربرد تقریب بورن-اوپنهایمر را نشان می‌دهد. ترکیب سریِ یک القاگر خطی L و یک القاگر غیرخطی عمومی با ظرفیت خازنی ذاتی C' را در نظر می‌گیریم، که همگی به‌صورت موازی با یک ظرفیت خازنی شنت کل C قرار گرفته‌اند؛ شکل ؟؟ را ببینید. اگر $C' = ۰$ باشد، با یک مدار تکین روبه‌رو هستیم که در آن هامیلتونی را نمی‌توان به‌صورت مستقیم به‌دست آورد، زیرا یک درجه آزادی فقط در انرژی پتانسیل ظاهر می‌شود؛ بحث مربوط به این حالت را در بخش ۳-۳-۱ ببینید.

در اینجا فرض می‌کنیم C' صفر نیست، اما بسیار کوچک است. در این حالت، می‌توانیم لاگرانژی زیر را به‌صورت مستقیم تبدیل کنیم:

$$\mathcal{L} = \frac{C\dot{\Phi}^۲}{۲} + \frac{C'\dot{\Phi}_c^۲}{۲} - \frac{(\Phi-\Phi_c)^۲}{۲L} - U_{\mathrm{nl}}(\Phi_c), \qquad (۱۸B.)$$



شکل ۱۰-۱: ترکیب سری یک القاگر خطی L و یک القاگر غیرخطی، که با رنگ قرمز نشان داده شده است، به‌صورت موازی با یک ظرفیت خازنی شنت C. شاخه آبی، ظرفیت خازنی ذاتی C' مربوط به القاگر غیرخطی را مشخص می‌کند؛ ظرفیتی که آن را یا بسیار کوچک و رو به صفر، یعنی حالت منظم، یا کاملاً غایب، یعنی حالت تکین، در نظر می‌گیریم.

و هامیلتونی کوانتیده‌شده مدار را به‌دست آوریم:

$$H_r = \frac{\hat{Q}^۲}{۲C} + \frac{\hat{Q}_c^۲}{۲C'} + \frac{(\hat{\Phi} - \hat{\Phi}_c)^۲}{۲L} + U_{\rm nl}(\hat{\Phi}_c). \qquad (B.۱۹)$$

[۱] [۲]

واگرایی جمله دوم در رابطه (B.۱۹) هنگامی که $C' \to ۰$ نشان می‌دهد که متغیر Φ_c «سریع» و پرانرژی خواهد بود. تقریب بورن–اوپنهایمر [۱۴۶] به ما اجازه می‌دهد که یک هامیلتونی مؤثر کم‌انرژی را فقط به‌صورت تابعی از Φ و Q به‌دست آوریم. برای این کار، ابتدا معادله شرودینگر ایستا را که متناظر با درجه آزادی سریع Φ_c است، برای مقادیر ثابت Φ و Q حل می‌کنیم. بنابراین، بخش پرانرژی H_r را که به‌صورت کلاسیکی دینامیک سریع را نشان می‌دهد، به شکل زیر مشخص می‌کنیم:

$$H_{\rm fast} = \frac{\hat{Q}_c^۲}{۲C'} + \frac{(\hat{\Phi} - \hat{\Phi}_c)^۲}{۲L} + U_{\rm nl}(\hat{\Phi}_c), \qquad (B.۲۰)$$

و معادله زیر را حل می‌کنیم:

$$H_{\rm fast}\psi_{\Phi,n}(\Phi_c) = E_{\Phi,n}\psi_{\Phi,n}(\Phi_c), \qquad (B.۲۱)$$

برای توابع ویژه $\psi_{\Phi,n}(\Phi_c)$ و انرژی‌های ویژه متناظر $E_{\Phi,n}$. هر دو کمیت با $n \in \mathbb{N}$ برچسب‌گذاری می‌شوند و با Φ پارامتردهی می‌گردند. سپس انرژی حالت پایه، یعنی $n = ۰$، به‌عنوان یک پتانسیل مؤثر کم‌انرژی برای متغیر کم‌انرژی یا «کند» Φ در نظر گرفته می‌شود. دینامیک این متغیر توسط هامیلتونی مؤثر زیر توصیف می‌شود:

$$H_{r,\rm eff} = \frac{\hat{Q}^۲}{۲C} + U_{\rm BO}(\hat{\Phi}), \qquad (B.۲۲)$$

که در آن پتانسیل بورن–اوپنهایمر از انرژی حالت پایه متغیر سریع به‌دست می‌آید:

$$U_{\rm BO}(\Phi) = E_{\Phi,n=۰} - E_{\Phi=۰,n=۰}. \qquad (B.۲۳)$$

[۱] برای کار اصلی بورن و اوپنهایمر، که به زبان آلمانی منتشر شده است، به مرجع [۱۴۷] مراجعه کنید.

[۲] اگر بسط حول نقطه‌ای انجام شود که در آن N دارای مقدارهای ویژه منفی باشد، باید جمله‌های غیرخطی مرتبه بالاتر نیز وارد شوند تا یک پتانسیل محصورکننده به‌دست آید.

در اینجا مفید است که یک جابه‌جایی انرژی برای $U_{\rm BO}(\Phi)$ معرفی کنیم، به‌گونه‌ای که

$$U_{\rm BO}(۰) = ۰$$

باشد. این کار باعث می‌شود از ثابت‌های افزایشی‌ای که هنگام $C' \to ۰$ واگرا می‌شوند، اجتناب شود.
به‌زودی یک انتخاب خاص برای $U_{\rm nl}$ انجام خواهیم داد. البته پتانسیل غیرخطی شناخته‌شده در این زمینه همان پتانسیل جوزفسون است:

$$-E_J \cos(\Phi_c).$$

اما چون در اینجا فقط می‌خواهیم روش ریاضی نظریه بورن–اوپنهایمر را نشان دهیم، انتخاب دیگری انجام می‌دهیم که تحلیل را ساده‌تر می‌کند. در بسیاری از وضعیت‌ها، از جمله زمانی که پتانسیل جوزفسون داریم، تقریب بورن–اوپنهایمر به یک مسئله کاملاً عددی تبدیل می‌شود؛ چیزی که در اینجا می‌خواهیم از آن اجتناب کنیم. در پایان این بخش، ارتباط $U_{\rm nl}$ ساده‌شده خود را با حالت واقعی پتانسیل جوزفسون در شکل ؟؟ توضیح خواهیم داد.
در ادامه، مناسب است که درجه آزادی Φ را به‌عنوان یک متغیر کلاسیکی در نظر بگیریم، در حالی که فقط Φ_c کوانتیده می‌شود. بنابراین روی متغیر Φ علامت کلاه نمی‌گذاریم، اما آن را فقط در پایان روند کار کوانتیده خواهیم کرد. پیش از انتخاب یک $U_{\rm nl}$ خاص، مفید است که هامیلتونی سریع را بی‌بعد کنیم. فرکانس تشدیدگر $\mathrm{L}C'$ و پارامتر نوسان نقطه صفر شار را به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$\omega_r' = \frac{۱}{\sqrt{LC'}}, \qquad \delta\Phi = \sqrt{\hbar}\left(\frac{L}{C'}\right)^{۱/۴}, \tag{B.۲۴}$$

و سپس $H_{\rm fast}$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$H_{\rm fast} = \hbar\omega_r'\left[\frac{\hat{p}^۲+\hat{z}^۲}{۲} + \frac{U_{\rm nl}(\delta\Phi\,\hat{z}+\Phi)}{\hbar\omega_r'}\right]. \tag{B.۲۵}$$

توجه کنید که پارامتر $\delta\Phi$ اساساً همان $\Phi_{\rm zpf}$ در رابطه (۲,۲۹) است، با این تفاوت که به‌اندازه ضریب $\sqrt{۲}$ اختلاف دارد. متغیرهای مزدوج بی‌بعد $\hat{z}$ و $\hat{p}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\hat{z} = \frac{\hat{\Phi}_c - \Phi}{\delta\Phi}, \qquad \hat{p} = \frac{\hat{Q}_c\delta\Phi}{\hbar},$$

و رابطه کموتاسیون کانونی زیر را ارضا می‌کنند:

$$[\hat{z},\hat{p}] = i۱.$$

اکنون پارامتر

$$\epsilon = \frac{۱}{\sqrt{\hbar\omega_r'}} = \frac{\sqrt[۴]{LC'}}{\sqrt{\hbar}} = \frac{\sqrt{L}}{\delta\Phi}$$

را تعریف می‌کنیم. با خارج کردن پیش‌ضریب در رابطه (B.۲۵)، به‌دست می‌آوریم:

$$\epsilon^۲ H_{\rm fast} = H_۰ + \epsilon^۲ U_{\rm nl}\left(\frac{\sqrt{L}}{\epsilon}\hat{z} + \Phi\right), \tag{B.۲۶}$$

که در آن هامیلتونی بی‌بعد نوسانگر هارمونیک برابر است با:

$$H_۰ = \frac{\hat{p}^۲+\hat{z}^۲}{۲}.$$

توجه کنید که هدف ما تعیین وابستگی حالت پایه این هامیلتونی به Φ است؛ وابستگی‌ای که فقط در جمله آخر ظاهر می‌شود. همچنین چون هنگام در نظر گرفتن حد $C' \to 0$ می‌توان ϵ را یک پارامتر کوچک دانست، ممکن است بتوانیم با در نظر گرفتن جمله آخر در رابطه (B.26) به‌عنوان یک اختلال روی حالت پایه H_0 پیش برویم؛ مشابه بسطی که در رابطه (B.16) داشتیم. انرژی حالت پایه H_0 برابر $1/2$ است، بنابراین به دنبال تصحیح‌های کوچک نسبت به آن خواهیم بود. البته در پایان باید ϵ^2 را از سمت چپ رابطه (B.26) خارج کنیم؛ بنابراین انرژی حالت پایه H_{fast} واگرا خواهد شد. این نتیجه درست است و ناشی از نوسان‌های نقطه صفر است. اما وابستگی این انرژی حالت پایه به Φ در تصحیح‌های اختلالی ظاهر می‌شود و برای توابع U_{nl} مورد نظر، واگرا نخواهد شد.

البته مهم‌ترین حالت، پتانسیل جوزفسون است؛ اما در آن حالت محاسبه اختلالی به‌صورت بسته امکان‌پذیر نیست. بنابراین، برای این‌که بتوانیم مسئله را به‌صورت تحلیلی حل کنیم، پتانسیل غیرخطی دیگری را انتخاب می‌کنیم:

$$U_{\text{nl}}(\Phi) = E_{\text{nl}} \left| \frac{\Phi}{\Phi_0} \right|^{3/2} . \tag{B.27}$$

برای این انتخاب، جمله اختلالی در رابطه (B.26) به‌صورت صریح برابر است با:

$$\epsilon^2 U_{\text{nl}} \left(\frac{\sqrt{L}}{\epsilon} \hat{z} + \Phi \right) = \epsilon^{1/2} E_{\text{nl}} \frac{L^{3/4}}{\Phi_0^{3/2}} \left| \hat{z} + \frac{\epsilon}{\sqrt{L}} \Phi \right|^{3/2} . \tag{B.28}$$

برای ادامه با نظریه اختلال مرتبه اول، مقدار زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &\left\langle 0 \left| \epsilon^{1/2} E_{\text{nl}} \frac{L^{3/4}}{\Phi_0^{3/2}} \left| \hat{z} + \frac{\epsilon}{\sqrt{L}} \Phi \right|^{3/2} \right| 0 \right\rangle \\ &= \epsilon^{1/2} E_{\text{nl}} \frac{L^{3/4}}{\pi^{1/2} \Phi_0^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{-z^2} \left| z + \frac{\epsilon}{\sqrt{L}} \Phi \right|^{3/2} \\ &= \epsilon^{1/2} E_{\text{nl}} \frac{L^{3/4}}{\pi^{1/2} \Phi_0^{3/2}} \frac{\pi \sqrt{\epsilon \Phi}}{2 \sqrt[4]{L}} e^{-\frac{\epsilon^2 \Phi^2}{4L}} \left[\frac{\epsilon^2 \Phi^2}{L} I_{3/4} \left(\frac{\epsilon^2 \Phi^2}{4L} \right) + \left(\frac{\epsilon^2 \Phi^2}{L} + 1 \right) I_{-1/4} \left(\frac{\epsilon^2 \Phi^2}{4L} \right) \right] . \end{aligned} \tag{B.29}$$

در اینجا ظهور توابع بسل اصلاح‌شده I_n را مشاهده می‌کنیم. انتگرال‌ها با کمک نرم‌افزار Wolfram Mathematica به‌دست آمده‌اند. توابع بسل در اینجا نسبت به آرگومان‌های خود غیرتحلیلی هستند، زیرا ریشه چهارم ظاهر می‌شود. اما از آن‌جا که این آرگومان‌ها مانند Φ^2 رفتار می‌کنند، و همچنین به دلیل وجود ضریب اضافی $\sqrt{\Phi}$، رابطه (B.29) نسبت به Φ^2 تحلیلی است. با بسط تیلور به‌دست می‌آوریم:

$$\left\langle 0 \left| \epsilon^{1/2} E_{\text{nl}} \frac{L^{3/4}}{\Phi_0^{3/2}} \left| \hat{z} + \frac{\epsilon}{\sqrt{L}} \Phi \right|^{3/2} \right| 0 \right\rangle = \epsilon^{1/2} E_{\text{nl}} \frac{L^{3/4}}{\pi^{1/2} \Phi_0^{3/2}} \left(\text{const.} + \frac{3\pi}{4 \sqrt[4]{2} \Gamma(3/4)} \frac{\epsilon^2 \Phi^2}{L} + O\big((\epsilon \Phi)^4\big) \right) . \tag{B.30}$$

بنابراین، با تقسیم بر ϵ^2، شکل زیر را برای پتانسیل بورن-اوپنهایمر به‌دست می‌آوریم:

$$U_{\text{BO}}(\Phi) = E_{\Phi,0} - E_{\Phi=0,0} \approx \frac{3\pi^{1/2}}{4 \sqrt[4]{2} \Gamma(3/4)} \frac{E_{\text{nl}}}{L^{1/4} \Phi_0^{3/2}} \epsilon^{1/2} \Phi^2 = \frac{3\pi^{1/2}}{4 \sqrt[4]{2} \Gamma(3/4)} \frac{E_{\text{nl}} (C')^{1/8}}{\hbar^{1/4} L^{1/8} \Phi_0^{3/2}} \Phi^2 . \tag{B.31}$$

با مقایسه با رابطه (۲,۲۸)، خواننده می‌تواند ببیند که این بیان برای پتانسیل بورن–اوپنهایمر از نظر ابعادی سازگار است. بررسی بسط تیلور نشان می‌دهد که این عبارت درجه‌دو در بازه‌ای معتبر است که هنگام $\epsilon \to 0$ واگرا می‌شود. بنابراین مشاهده می‌کنیم که پتانسیل ناهارمونیک، به دلیل نوسان‌های کوانتومی، به یک پتانسیل مؤثر هارمونیک برای مختصات کند تبدیل شده است. اما شاید نکته مهم‌تر این باشد که به دلیل وابستگی نهایی به C'، کل

این پتانسیل هنگام $C' \to ۰$ از بین می‌رود؛ البته بسیار آهسته. بنابراین، کل مدار از گره Φ تا زمین به یک مدار باز تبدیل می‌شود؛ یعنی به‌طور مؤثر، اندوکتانس بی‌نهایت می‌شود. این مهم‌ترین پیامد نوسان‌های کوانتومی است. در مرجع [۴۰] نشان داده شده است که این رفتار مدار باز، جهان‌شمول است و همچنین در حالتی که یک پیوند جوزفسون به‌عنوان عنصر غیرخطی در شکل ؟؟ حضور داشته باشد نیز برقرار می‌ماند. تنها شرط لازم برای برقرار بودن این رفتار جهان‌شمول آن است که پتانسیل غیرخطی برای مقادیر بزرگ $|\Phi_c|$ کندتر از $\Phi_c^۲$ رشد کند.

۳-۱۰ مدهای نرمال و ساختار کوئر

بر پایه تحلیل انجام‌شده در پیوست ؟؟، اکنون نشان می‌دهیم که یک ماتریس امپدانس دلخواهِ بی‌اتلاف و دوسویه را همیشه می‌توان به‌صورت رابطه (۳۴.۵) بسط داد. این نتیجه، در حالت تک‌پورتی، با نام قضیه فاستر شناخته می‌شود [۱۴۸،۱۰۳]. در اینجا، این نتیجه را بر اساس فرمالیسم لاگرانژی برای مدارهای الکتریکی استخراج می‌کنیم که در این کتاب معرفی شده است. رویکردی مشابه نیز قبلاً در مرجع [۱۴۹] مطرح شده است. این استخراج، هم‌ارزی بین مُدهای نرمال یک مدار خطی و بسط فاسترِ ماتریس امپدانس را روشن می‌کند. همچنین فرمول‌بندی لاگرانژی امکان استخراج مستقیم هامیلتونی و در نتیجه کوانتش مدار را فراهم می‌سازد. علاوه بر این، نشان خواهیم داد که چگونه اثرهای غیرخطی، برای مثال ناشی از اتصال‌های جوزفسون کوپل‌شده به پورت‌ها، می‌توانند به‌سادگی در مدل وارد شوند و به هامیلتونی کلی در رابطه (۸۲.۵) منجر شوند.

استخراج را با حالت کلی یک شبکه N-پورتی آغاز می‌کنیم که به‌صورت شماتیک در شکل ۵-۱ نشان داده شده است. از آنجا که فرض می‌کنیم شبکه LTI است، این شبکه به‌طور کامل با ماتریس پاسخ ضربه‌ای خود، یعنی امپدانس $Z(s)$ در حوزه لاپلاس، مشخص می‌شود. همچنین شبکه باید فقط شامل اتصال‌های داخلی میان خازن‌ها، القاگرها و القای متقابل‌ها، یا ترانسفورمرهای ایده‌آل، باشد. ما روند کلی به‌دست‌آوردن لاگرانژی یک مدار را که در بخش ۲-۱ توضیح داده شده است دنبال می‌کنیم. مشاهدات زیر را داریم:

- همیشه می‌توانیم شارهای پورت Φ_{p_n}، برای $n = ۱, \ldots, N$، را که در رابطه (۲۷.۵) تعریف شده‌اند، به‌عنوان متغیرهای مسئله انتخاب کنیم.

- افزون بر این، درجات آزادی داخلی‌ای نیز وجود خواهند داشت که معمولاً به‌صورت انتگرال ولتاژ روی برخی شاخه‌های دلخواه تعریف می‌شوند. این درجات آزادی داخلی به توپولوژی مدار خاص وابسته‌اند. آن‌ها را با $\Phi_{I_{n'}}$، برای $n' = ۱, \ldots, N_I$، نشان می‌دهیم که در آن N_I تعداد کل درجات آزادی داخلی مستقل است.

با توجه به این موارد، لاگرانژی یک شبکه خطی، دوسویه و بی‌اتلاف را همیشه می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathcal{L}_{\text{lin}}(\dot{\theta};\theta) = \frac{۱}{۲}\dot{\theta}^T C \dot{\theta} - \frac{۱}{۲}\theta^T K \theta, \qquad (\text{B.۳۲})$$

که در آن بردار کل شارها را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\theta = \left[\Phi_{p_۱}, \ldots, \Phi_{p_N}, \Phi_{I_۱}, \ldots, \Phi_{I_{N_I}}\right]^T. \qquad (\text{B.۳۳})$$

یعنی θ برداری با طول

$$M = N + N_I$$

است، که در آن M تعداد کل متغیرهای مستقل در مسئله است.

اکنون توجه می‌کنیم که رابطه (B.۳۲) همان شکل لاگرانژی در رابطه (B.۶) را دارد؛ بنابراین می‌توانیم مستقیماً استخراج انجام‌شده در آنجا را دنبال کنیم. با تعریف متغیرهای مُد نرمال، مطابق قضیه ؟؟، داریم:

$$\Phi = S^{-۱}\theta, \qquad (\text{B.۳۴})$$

و در نتیجه می‌توانیم بنویسیم:

$$\mathcal{L}_{\text{lin}}(\Phi, \dot{\Phi}) = \sum_{m=۱}^{M} \left[\frac{C_۰}{۲} \dot{\Phi}_m^۲ - \frac{C_۰}{۲} \omega_m^۲ \Phi_m^۲ \right]. \tag{B.۳۵}$$

همان‌طور که انتظار می‌رود، لاگرانژیِ نوشته‌شده بر حسب شارهای مُد نرمال را می‌توان به‌صورت مجموعه‌ای از M نوسانگر هارمونیک ناهم‌بسته با فرکانس‌های ω_m و امپدانس مشخصه دلخواه داده‌شده در رابطه (۳۰.۵) تفسیر کرد؛ در اینجا از ظرفیت مرجع $C_۰$ استفاده شده است.

استخراج قبلی نشان می‌دهد که چنین شبکه‌ای را همیشه می‌توان با مدار معادل نشان‌داده‌شده در شکل ؟؟ جایگزین کرد. در واقع، این مدار تفسیر ساده‌ای دارد. ما چندین نوسانگر LC موازی و ناهم‌بسته داریم که با مُدهای نرمال متناظرند. رابطه (B.۳۴) نشان می‌دهد که شارهای پورت، یا ولتاژهای پورت، را می‌توان به‌صورت ترکیب خطی شارهای متناظر با مُدهای نرمال نوشت. به‌طور مشخص:

$$\Phi_{p_n} = \sum_{m=۱}^{M} t_{mn} \Phi_m, \qquad n = ۱, \ldots, N, \tag{B.۳۶}$$

که در آن

$$t_{mn} = S_{mn} \in \mathbb{R}$$

تفسیر نسبت دورِ علامت‌دار ترانسفورمرها در مدار شکل ؟؟ را دارد و همان مؤلفه‌های بردارهای t_m در رابطه (۳۲.۵) هستند.

اکنون یک تمرین ساده است که نشان دهیم ماتریس امپدانس متناظر با مدار شکل ؟؟ را می‌توان به‌صورت رابطه (۳۴.۵) بسط داد. امپدانس نوسانگر LC شماره m در مدار برابر است با:

$$Z_m(s) = \frac{۱}{۲C_۰} \left(\frac{۱}{s + i\omega_m} + \frac{۱}{s - i\omega_m} \right). \tag{B.۳۷}$$

اکنون بردار عمومی جریان‌ها را به پورت‌ها اعمال می‌کنیم:

$$I(s) = \left[I_{p_۱}(s) \quad I_{p_۲}(s) \quad \cdots \quad I_{p_N}(s) \right]^T. \tag{B.۳۸}$$

جریان کل عبوری از نوسانگر LC شماره m برابر است با:

$$I_m(s) = \sum_{n=۱}^{N} t_{mn} I_{p_n}(s) = t_m^T I(s). \tag{B.۳۹}$$

در نتیجه، ولتاژ دو سر نوسانگر LC شماره m به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$V_m(s) = Z_m(s) I_m(s) = \frac{۱}{۲C_۰} \left(\frac{۱}{s + i\omega_m} + \frac{۱}{s - i\omega_m} \right) t_m^T I(s). \tag{B.۴۰}$$

افت ولتاژ روی پورت n-ام برابر است با:

$$V_{p_n}(s) = \sum_{m=۱}^{M} t_{mn} V_m(s) = \sum_{m=۱}^{M} \frac{۱}{۲C_۰} \left(\frac{۱}{s + i\omega_m} + \frac{۱}{s - i\omega_m} \right) t_{mn} t_m^T I(s). \tag{B.۴۱}$$

بنابراین بردار ولتاژهای پورت را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$V(s) = \underbrace{\left(\sum_{m=۱}^{M} \frac{۱}{۲C_۰} \left(\frac{۱}{s + i\omega_m} + \frac{۱}{s - i\omega_m} \right) t_m t_m^T \right)}_{Z(s)} I(s), \tag{B.۴۲}$$

که با ماتریس

$$R_m = t_m t_m^T$$

نتیجه مورد نظر را نشان می‌دهد.

پس از کوانتیده‌کردن مدار، عملگرهای نابودی و خلق برای مُدهای نرمال را می‌توان به‌صورت معمول معرفی کرد و نوشت:

$$\hat{\Phi}_m = \sqrt{\frac{\hbar Z_m}{۲}} \left(\hat{a}_m + \hat{a}_m^\dagger\right), \qquad (۴۳\text{B.})$$

که رابطه (۲۹.۵) را نتیجه می‌دهد و رابطه (۳۳.۵) نیز از آن به‌دست می‌آید.

در نهایت، همان‌طور که در بخش ۵-۳ بحث شد، حالت اتلافی ضعیف را نیز ذکر می‌کنیم. این حالت را می‌توان با افزودن مقاومت‌های R_m، برای $m = ۱, \ldots, M$، به‌صورت موازی با نوسانگرهای LC متناظر با هر مُد مدل کرد؛ همان‌طور که در شکل ؟؟ نشان داده شده است. اتلاف ضعیف متناظر با بزرگ بودن مقاومت‌های R_m است.

در این حالت، با دنبال‌کردن استدلالی مشابه با بخش ۵-۳-۱ برای نوسانگر تک‌پورتی RLC، در حد اتلاف ضعیف، ماتریس امپدانس را می‌توان به‌صورت تقریبی زیر نوشت:

$$Z(s) \approx \sum_{m=۱}^{M} \frac{۱}{۲C_۰} \left(\frac{۱}{s + i(\omega_m + i\kappa_m/۲)} + \frac{۱}{s - i(\omega_m - i\kappa_m/۲)}\right) R_m. \qquad (۴۴\text{B.})$$

به یاد بیاورید که شرط داشتن اتلاف ضعیف برای هر مُد برابر است با:

$$\kappa_m = \frac{۱}{R_m C_۰} \ll \omega_m. \qquad (۴۵\text{B.})$$

برای تعیین نرخ‌های واپاشی κ_m، و در نتیجه مقاومت‌های مؤثر R_m در مدار شکل ؟؟، روند کار کاملاً معادل حالتی است که در بخش ۵-۳-۱ برای حالت تک‌پورتی توضیح داده شد. یک پورت دلخواه، مثلاً پورت ۱، را انتخاب می‌کنیم و همه پورت‌های دیگر را مدار باز در نظر می‌گیریم. اگر اجازه دهیم جریان $I_۱(s)$ از پورت ۱ عبور کند، خواهیم داشت:

$$V(s) = \begin{pmatrix} V_{p_۱}(s) \\ V_{p_۲}(s) \\ \vdots \\ V_{p_N}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{۱۱}(s) \\ Z_{۲۱}(s) \\ \vdots \\ Z_{N۱}(s) \end{pmatrix} I_۱(s). \qquad (۴۶\text{B.})$$

توجه کنید که در این آرایش، پورت ۱ اثر پورت‌های دیگر را نمی‌بیند؛ بنابراین مدار را می‌توان مانند حالت تک‌پورتی در شکل ؟؟ در نظر گرفت. از این‌رو، پورت ۱ ادمیتانس مؤثر زیر را می‌بیند:

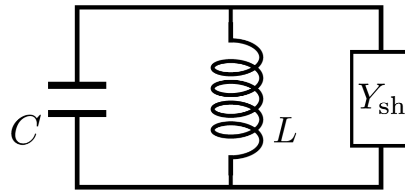
$$Y(s) = \frac{I_۱(s)}{V_{p_۱}(s)} = \frac{۱}{Z_{۱۱}(s)}. \qquad (۴۷\text{B.})$$

این نشان می‌دهد که در حالت چندپورتی نیز می‌توان نرخ میرایی تقریبی κ_m برای مُد m را با استفاده از رابطه (۴۴.۵) و ادمیتانس $Y(s)$ در رابطه (۴۷B.)، در حوزه فرکانس، به‌دست آورد.

۴-۱۰ مدار LC شنت شده با یک ادمیتانس کوچک

با فرکانس تشدید

$$\omega_r = \frac{۱}{\sqrt{LC}}.$$



شکل ۱۰-۲: نوسانگر LC به‌صورت موازی با یک ادمیتانس شنت.

نزدیک به قطب $s \approx i\omega$، ادمیتانس نوسانگر LC تقریباً به‌صورت زیر است:

$$Y_{\rm LC}(s) \approx ۲C(s - i\omega_r). \quad (\text{B.۵۰})$$

بنابراین، در این تقریب، ادمیتانس کل برابر می‌شود با:

$$Y(s) \approx ۲C(s - i\omega_r) + Y_{\rm sh}(s) \approx ۲C\left\{s - i\left[\omega_r - \frac{\mathrm{Im}(Y_{\rm sh}(i\omega_r))}{۲C}\right] + \frac{\mathrm{Re}(Y_{\rm sh}(i\omega_r))}{۲C}\right\}. \quad (\text{B.۵۱})$$

در نتیجه، یک قطب جدید به‌دست می‌آوریم:

$$\tilde{p} = i\left[\omega_r - \frac{\mathrm{Im}(Y_{\rm sh}(i\omega_r))}{۲C}\right] - \frac{\mathrm{Re}(Y_{\rm sh}(i\omega_r))}{۲C} = i\tilde{\omega}_r - \frac{\kappa_{\rm sh}}{۲}, \quad (\text{B.۵۲})$$

که در آن فرکانس تشدید جابه‌جاشده را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{\omega}_r = \omega_r - \frac{\mathrm{Im}(Y_{\rm sh}(i\omega_r))}{۲C}, \quad (\text{B.۵۳})$$

و نرخ واپاشی ایجادشده توسط ادمیتانس شنت برابر است با:

$$\kappa_{\rm sh} = \frac{\mathrm{Re}(Y_{\rm sh}(i\omega_r))}{C}. \quad (\text{B.۵۴})$$

توجه کنید که این روند تا زمانی به‌صورت خودسازگار معتبر است که قطب جدید $\tilde{p}$ از قطب اصلی در $i\omega_r$ خیلی دور نشود. این شرط زمانی برقرار است که:

$$\left|\frac{\mathrm{Im}(Y_{\rm sh}(i\omega_r))}{۲C}\right| \ll \omega_r, \qquad \left|\frac{\mathrm{Re}(Y_{\rm sh}(i\omega_r))}{۲C}\right| \ll \omega_r. \quad (\text{B.۵۵})$$

با تکرار همین روند در نزدیکی $s \approx -i\omega_r$، و با استفاده از این واقعیت که برای هر $\omega \in \mathbb{R}$ داریم

$$\mathrm{Re}(i\omega) = \mathrm{Re}(-i\omega), \qquad \mathrm{Im}(i\omega) = -\mathrm{Im}(-i\omega),$$

قطب دیگری به‌دست می‌آوریم که صرفاً مزدوج مختلط $\tilde{p}$ است. بنابراین، با استدلالی مشابه بخش ۵-۳-۱، امپدانس مدار شکل ۱۰-۲ را می‌توان به‌صورت زیر تقریب زد:

$$Z(s) = \frac{۱}{Y(s)} \approx \frac{۱}{۲C}\left(\frac{۱}{s - \tilde{p}} + \frac{۱}{s - \tilde{p}^*}\right). \quad (\text{B.۵۶})$$

تا اینجا هنوز روشن نیست که چرا ضریب $\kappa_{\rm sh}$ در رابطه (.۵۴B) «نرخ واپاشی» نامیده می‌شود. برای فهم این موضوع، باید مسئله را در حوزه زمان تحلیل کنیم. فرض کنید یک جریان دلتا دیراک

$$i(t) = i_{\circ}\delta(t)$$

از مدار عبور کند. در حوزه لاپلاس داریم:

$$I(s) = i_{\circ},$$

و بنابراین:

$$V(s) = Z(s)I(s) \approx \frac{i_{\circ}}{۲C}\left(\frac{۱}{s-\tilde{p}} + \frac{۱}{s-\tilde{p}^*}\right). \qquad (۵۷B.)$$

اکنون به یاد بیاورید که تبدیل لاپلاس تابع

$$g(t) = e^{pt}u(t),$$

که در آن $u(t)$ تابع پله هویساید است، به‌صورت زیر داده می‌شود:

$$G(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{(p-s)t}u(t) = \int_{\circ}^{+\infty} dt\, e^{(p-s)t} = \frac{۱}{s-p}, \qquad (۵۸B.)$$

به شرطی که

$$\mathrm{Re}(p) < \mathrm{Re}(s).$$

پس در حوزه زمان، برای $t \geq ۰$، داریم:

$$v(t) = \frac{i_{\circ}}{۲C}\left(e^{\tilde{p}t} + e^{\tilde{p}^*t}\right) = \frac{i_{\circ}}{۲C}\left(e^{i\tilde{\omega}_r t} + e^{-i\tilde{\omega}_r t}\right)e^{-\frac{\kappa_{\rm sh}t}{۲}}, \qquad (۵۹B.)$$

که نشان می‌دهد چرا $\kappa_{\rm sh}/۲$ به‌عنوان نرخ واپاشی دامنه تفسیر می‌شود.

در نهایت، همانند مدار RLC که در بخش ۹-۲ تحلیل شد، فرمول کوانتومی نرخ واپاشی در رابطه (۶.۷)، در دمای صفر، با استخراج کلاسیکی رابطه (.۵۴B) برای یک نوسانگر هارمونیک منطبق است:

$$\frac{۱}{T_۱} = \frac{\mathrm{Re}(Y_{\rm sh}(i\omega_r))}{C} = \frac{\mathrm{Re}(\mathcal{Y}_{\rm sh}(\omega_r))}{C} = \kappa_{\rm sh}. \qquad (۶۰B.)$$

منابع

[1] R. Newcomb, *Linear Multiport Synthesis*. New York: McGraw-Hill, 1966.

[2] B. Peikari, *Fundamentals of Network Analysis and Synthesis*, ser. Solid State Physical Electronics Series. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1974.

[3] B. Yurke and J. S. Denker, *Phys. Rev. A*, vol. 29, p. 1419, 1984.

[4] U. Vool and M. Devoret, *Int. J. Circuit Theory Appl.*, vol. 45, p. 897, 2017.

[5] G. Burkard, R. Koch, and D. DiVincenzo, *Phys. Rev. B*, vol. 69, p. 064503, 2004.

[6] S. Rasmussen, K. Christensen, S. Pedersen, L. Kristensen, T. Baekkegaard, N. Loft, and N. Zinner, *PRX Quantum*, vol. 2, p. 040204, 2021.

[7] J. Clarke and A. I. Braginski, *The SQUID Handbook: Fundamentals and Technology of SQUIDs and SQUID Systems*. Wiley-VCH, 2004.

[8] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity*, 2nd ed. Dover Publications, 2004.

[9] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, 8th ed. Wiley, 2004.

[10] N. Muthusubramanian *et al.*, *Quantum Sci. Technol.*, vol. 9, p. 025006, 2024.

[11] V. Ambegaokar and A. Baratoff, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 10, p. 486, 1963.

[12] J. B. Hertzberg *et al.*, *npj Quantum Inf.*, vol. 7, 2021.

[13] J. Ulrich and F. Hassler, *Phys. Rev. B*, vol. 94, p. 094505, 2016.

[14] A. Osborne, T. Larson, S. Jones, R. W. Simmonds, A. Gyenis, and A. Lucas, *arXiv:2304.08531*, Appl. Phys. Rev. 2023.

[15] A. Parra-Rodriguez and I. L. Egusquiza, *arXiv:2304.12252*, Appl. Phys. Rev. 2023.

[16] S. Bravyi, O. Dial, J. M. Gambetta, D. Gil, and Z. Nazario, *J. Appl. Phys.*, vol. 132, p. 160902, 2022.

[17] C. Alexander and M. Sadiku, *Fundamentals of Electric Circuits*, 4th ed. McGraw Hill Higher Education, 2008.

[18] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 4th ed. Boston, MA: Pearson, 2013.

[19] R. Versluis, S. Poletto, N. Khammassi, B. Tarasinski, N. Haider, D. J. Michalak, A. Bruno, K. Bertels, and L. DiCarlo, *Phys. Rev. Appl.*, vol. 8, p. 034021, 2017.

[20] C. K. Andersen, A. Remm, S. Lazar, S. Krinner, N. Lacroix, G. J. Norris, M. Gabureac, C. Eichler, and A. Wallraff, *Nat. Phys.*, vol. 16, p. 875, 2020.

[21] M. H. Devoret, J. M. Martinis, and J. Clarke, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 55, p. 1908, 1985.

[22] J. M. Martinis, M. H. Devoret, and J. Clarke, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 55, p. 1543, 1985.

[23] X. You, J. A. Sauls, and J. Koch, *Phys. Rev. B*, vol. 99, p. 174512, 2019.

[24] J. Bryon, D. Weiss, X. You, S. Sussman, X. Croot, Z. Huang, J. Koch, and A. A. Houck, *Phys. Rev. Appl.*, vol. 19, p. 034031, 2023.

[25] R.-P. Riwar and D. P. DiVincenzo, *npj Quantum Inf.*, vol. 8, 2022.

[26] S. M. Girvin and K. Yang, *Modern Condensed Matter Physics*. Cambridge University Press, 2019.

[27] C. Timm, *Lecture Notes on the Theory of Superconductivity*. TU Dresden, 2020.

[28] J. E. Mooij and Y. V. Nazarov, *Nat. Phys.*, vol. 2, p. 169, 2006.

[29] C. N. Lau, N. Markovic, M. Bockrath, A. Bezryadin, and M. Tinkham, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 87, p. 217003, 2001.

[30] A. D. Zaikin, D. S. Golubev, A. van Otterlo, and G. T. Zimányi, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 78, p. 1552, 1997.

[31] D. S. Golubev and A. D. Zaikin, *Phys. Rev. B*, vol. 78, p. 144502, 2008.

[32] J. R. Kirtley, C. C. Tsuei, and F. Tafuri, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 90, p. 257001, 2003.

[33] A. G. Semenov and A. D. Zaikin, *Phys. Rev. B*, vol. 94, p. 014512, 2016.

[34] K. A. Matveev, A. I. Larkin, and L. I. Glazman, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 89, p. 096802, 2002.

[35] V. E. Manucharyan, “Superinductance,” Ph.D. dissertation, Yale University, 2012.

[36] V. E. Manucharyan, J. Koch, L. I. Glazman, and M. H. Devoret, *Science*, vol. 326, p. 113, 2009.

[37] D. T. Le, A. Grimsmo, C. Müller, and T. M. Stace, *Phys. Rev. A*, vol. 100, p. 062321, 2019.

[38] C. Koliofoti and R.-P. Riwar, *npj Quantum Inf.*, vol. 9, p. 125, 2023.

[39] M. Rymarz, “The quantum electrodynamics of singular and nonreciprocal superconducting circuits,” Master’s thesis, RWTH Aachen, 2018.

[40] M. Rymarz and D. P. DiVincenzo, *Phys. Rev. X*, vol. 13, p. 021017, 2023.

[41] A. M. Zagoskin, *Quantum Engineering: Theory and Design of Quantum Coherent Structures*. Cambridge University Press, 2011.

[42] I. Ozfidan *et al.*, *Phys. Rev. Appl.*, vol. 13, p. 034037, 2020.

[43] A. Ciani and B. M. Terhal, *Phys. Rev. A*, vol. 103, p. 042401, 2021.

[44] F. Yan *et al.*, *Nat. Commun.*, vol. 7, p. 2041, 2016.

[45] P. Krantz, M. Kjaergaard, F. Yan, T. P. Orlando, S. Gustavsson, and W. D. Oliver, *Appl. Phys. Rev.*, vol. 6, p. 021318, 2019.

[46] T. P. Orlando, J. E. Mooij, L. Tian, C. H. van der Wal, L. S. Levitov, S. Lloyd, and J. J. Mazo, *Phys. Rev. B*, vol. 60, p. 15398, 1999.

[47] R. Harris *et al.*, *Phys. Rev. B*, vol. 81, p. 134510, 2010.

[48] J. Q. You, X. Hu, S. Ashhab, and F. Nori, *Phys. Rev. B*, vol. 75, p. 140515, 2007.

[49] L. B. Nguyen, Y.-H. Lin, A. Somoroff, R. Mencia, N. Grabon, and V. E. Manucharyan, *Phys. Rev. X*, vol. 9, p. 041041, 2019.

[50] N. Maleeva *et al.*, *Nat. Commun.*, vol. 9, p. 2041, 2018.

[51] A. D. Paolo, A. L. Grimsmo, P. Groszkowski, J. Koch, and A. Blais, *New J. Phys.*, vol. 21, p. 043002, 2019.

[52] W. C. Smith, A. Kou, X. Xiao, U. Vool, and M. H. Devoret, *npj Quantum Inf.*, vol. 6, 2020.

[53] P. Brooks, A. Kitaev, and J. Preskill, *Phys. Rev. A*, vol. 87, p. 052306, 2013.

[54] I. V. Pechenezhskiy, R. A. Mencia, L. B. Nguyen, Y.-H. Lin, and V. E. Manucharyan, *Nature*, vol. 585, p. 368, 2020.

[55] A. Kitaev, "Protected qubit based on a superconducting current mirror," *arXiv:cond-mat/0609441*, Sep. 2006.

[56] D. K. Weiss, A. C. Y. Li, D. G. Ferguson, and J. Koch, *Phys. Rev. B*, vol. 100, p. 224507, 2019.

[57] C. Vuillot, A. Ciani, and B. M. Terhal, "Homological quantum rotor codes: Logical qubits from torsion," *arXiv:2303.13723*, Mar. 2023.

[58] M. V. Feigel'man, L. B. Ioffe, V. B. Geshkenbein, P. Dayal, and G. Blatter, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 92, p. 098301, 2004.

[59] A. Zee, *Group Theory in a Nutshell for Physicists*. Princeton NJ: Princeton University Press, 2016.

[60] S. Bravyi, M. B. Hastings, and S. Michalakis, *J. Math. Phys.*, vol. 51, p. 093512, 2010.

[61] D. Gottesman, "Stabilizer codes and quantum error correction," Ph.D. dissertation, CalTech, 1997.

[62] M. Hamermesh, *Group Theory and its Application in Physical Problems*. Reading, MA, USA: Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1989.

[63] S. Asaad *et al.*, *npj Quantum Inf.*, vol. 2, 2016.

[64] J. J. Sakurai and J. Napolitano, *Modern Quantum Mechanics*, 2nd ed. Cambridge University Press, 2017.

[65] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin, *Solid State Physics*. Holt-Saunders, 1976.

[66] J. Koch, T. M. Yu, J. Gambetta, A. A. Houck, D. I. Schuster, J. Majer, A. Blais, M. H. Devoret, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, *Phys. Rev. A*, vol. 76, p. 042319, 2007.

[67] D. Zeuch, F. Hassler, J. J. Slim, and D. P. DiVincenzo, *Ann. Phys.*, vol. 423, p. 168327, 2020.

[68] C. Gerry and P. Knight, *Introductory Quantum Optics*. Cambridge University Press, 2005.

[69] B. M. Terhal, *Rev. Mod. Phys.*, vol. 87, p. 307, 2015.

[70] H.-P. Breuer and F. Petruccione, *Theory of Open Quantum Systems*. New York: Oxford University Press, 2002.

[71] F. Motzoi, J. M. Gambetta, P. Rebentrost, and F. K. Wilhelm, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 103, p. 110501, 2009.

[72] H. Paik *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 107, p. 240501, 2011.

[73] M. Reagor, "Superconducting cavities for circuit quantum electrodynamics," Ph.D. dissertation, Yale University, 2015.

[74] D. M. Pozar, *Microwave Engineering*, 3rd ed. Hoboken NJ: Wiley, 2005.

[75] J. Kelly *et al.*, *Nature*, vol. 519, p. 66, 2015.

[76] C. W. Gardiner and M. J. Collett, *Phys. Rev. A*, vol. 31, p. 3761, 1985.

[77] A. Blais, A. L. Grimsmo, S. Girvin, and A. Wallraff, *Rev. Mod. Phys.*, vol. 93, 2021.

[78] D. Walls and G. Milburn, *Quantum Optics*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2008.

[79] A. Blais, R.-S. Huang, A. Wallraff, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, *Phys. Rev. A*, vol. 69, p. 062320, 2004.

[80] F. Mallet, F. R. Ong, A. Palacios-Laloy, F. Nguyen, P. Bertet, D. Vion, and D. Esteve, *Nat. Phys.*, vol. 5, p. 791, 2009.

[81] Y. Chen *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 113, p. 220502, 2014.

[82] J. Stehlik *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 127, p. 080505, 2021.

[83] B. M. Terhal, J. Conrad, and C. Vuillot, *Quantum Sci. Technol.*, vol. 5, p. 043001, 2020.

[84] W.-L. Ma, S. Puri, R. J. Schoelkopf, M. H. Devoret, S. Girvin, and L. Jiang, *Sci. Bull.*, vol. 66, p. 1789, 2021.

[85] M. F. Gely, A. Parra-Rodriguez, D. Bothner, Y. M. Blanter, S. J. Bosman, E. Solano, and G. A. Steele, *Phys. Rev. B*, vol. 95, p. 245115, 2017.

[86] M. Malekakhlagh, A. Petrescu, and H. E. Türeci, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 119, p. 073601, 2017.

[87] A. Parra-Rodriguez, E. Rico, E. Solano, and I. L. Egusquiza, *Quantum Sci. Technol.*, vol. 3, p. 024012, 2018.

[88] J. Chow, J. Gambetta, E. Magesan, D. W. Abraham, A. W. Cross, B. R. Johnson, N. A. Masluk, J. A. Smolin, S. J. Srinivasan, and M. Steffen, *Nat. Commun.*, vol. 5, p. 4015, 2014.

[89] L. Bishop, J. M. Chow, J. Koch, A. Houck, M. Devoret, E. Thuneberg, S. Girvin, and R. Schoelkopf, *Nat. Phys.*, vol. 5, p. 105, 2009.

[90] D. Braak, *Symmetry*, vol. 11, p. 1259, 2019.

[91] N. Langford *et al.*, *Nat. Commun.*, vol. 8, p. 1715, 2016.

[92] S. Bravyi, D. P. DiVincenzo, and D. Loss, *Ann. Phys.*, vol. 326, p. 2793, 2011.

[93] L. S. Theis and F. K. Wilhelm, *Phys. Rev. A*, vol. 95, p. 022314, 2017.

[94] A. Petrescu, C. L. Calonnec, C. Leroux, A. D. Paolo, P. Mundada, S. Sussman, A. Vrajitoarea, A. A. Houck, and A. Blais, *Phys. Rev. Appl.*, vol. 19, p. 044003, 2023.

[95] J. Gambetta, in *Quantum Information Processing*, D. DiVincenzo, Ed. Jülich: Forschungszentrum, Zentralbibliothek, 2013, lecture notes of the 44th IFF spring school 2013.

[96] M. A. Rol *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 123, p. 120502, 2019.

[97] S. E. Nigg, H. Paik, B. Vlastakis, G. Kirchmair, S. Shankar, L. Frunzio, M. H. Devoret, R. J. Schoelkopf, and S. M. Girvin, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 108, p. 240502, 2012.

[98] Z. K. Minev, Z. Leghtas, S. O. Mundhada, L. Christakis, I. M. Pop, and M. H. Devoret, *npj Quantum Inf.*, vol. 7, 2021.

[99] M. F. Gely and G. A. Steele, *New J. Phys.*, vol. 22, p. 013025, 2020.

[100] P. Triverio, S. Grivet-Talocia, M. S. Nakhla, F. G. Canavero, and R. Achar, *IEEE Trans. Adv. Packag.*, vol. 30, p. 795, 2007.

[101] W. C. Smith, A. Kou, U. Vool, I. M. Pop, L. Frunzio, R. J. Schoelkopf, and M. H. Devoret, *Phys. Rev. B*, vol. 94, p. 144507, 2016.

[102] C. G. Montgomery, R. H. Dicke, and E. M. Purcell, *Principles of Microwave Circuits*, ser. Electromagnetic Waves. Institution of Engineering and Technology, 1987.

[103] P. Russer, *Electromagnetics, Microwave Circuit and Antenna Design for Communications Engineering*. Boston: Artech House, 2006.

[104] Z. K. Minev, T. G. McConkey, M. Takita, A. D. Corcoles, and J. M. Gambetta, *arXiv:2103.10344*, Mar. 2021.

[105] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*. New York NY: Wiley, 1975.

[106] J. M. Martinis *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 95, p. 210503, 2005.

[107] A. D. O'Connell *et al.*, vol. 92, p. 112903, 2008.

[108] C. Wang, C. Axline, Y. Y. Gao, T. Brecht, Y. Chu, L. Frunzio, M. H. Devoret, and R. J. Schoelkopf, vol. 107, p. 162601, 2015.

[109] F. Solgun, D. W. Abraham, and D. P. DiVincenzo, *Phys. Rev. B*, vol. 90, p. 134504, 2014.

[110] F. Solgun and D. P. DiVincenzo, *Ann. Phys.*, vol. 361, p. 605, 2015.

[111] E. A. Guillemin, *Synthesis of Passive Networks: Theory and Methods Appropriate to the Realization and Approximation Problems*. Krieger, 1977.

[112] J. M. Martinis and M. R. Geller, *Phys. Rev. A*, vol. 90, p. 022307, 2014.

[113] O. Hefti, "CPHASE analysis in the eigenmode approach in presence of ZZ crosstalk," Master's thesis, TU Delft, 2020.

[114] B. Abdo, K. Sliwa, L. Frunzio, and M. Devoret, *Phys. Rev. X*, vol. 3, p. 031001, 2013.

[115] C. Desoer and E. Kuh, *Basic Circuit Theory*. McGraw-Hill, 1969.

[116] J. Koch, A. A. Houck, K. L. Hur, and S. M. Girvin, *Phys. Rev. A*, vol. 82, p. 043811, 2010.

[117] R. Navarathna, D. T. Le, A. R. Hamann, H. D. Nguyen, T. M. Stace, and A. Fedorov, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 130, p. 037001, 2023.

[118] D. Ristè, S. Poletto, M.-Z. Huang, A. Bruno, V. Vesterinen, O.-P. Saira, and L. DiCarlo, *Nat. Commun.*, vol. 6, p. 6983, 2015.

[119] B. Tellegen, "Improvements in or relating to gyrators," 1955, canadian Patent CA511631.

[120] G. Viola and D. P. DiVincenzo, *Phys. Rev. X*, vol. 4, p. 021019, 2014.

[121] B. D. H. Tellegen, vol. 3, p. 81, 1948.

[122] C. L. Hogan, vol. 31, p. 1, 1952.

[123] S. Bosco, D. DiVincenzo, and D. Reilly, *Phys. Rev. Appl.*, vol. 12, p. 014030, 2019.

[124] B. Placke, "Admittance of quantum hall effect gyrators and circulators," Bachelor thesis, RWTH Aachen, 2016.

[125] A. Parra-Rodriguez, I. L. Egusquiza, D. P. DiVincenzo, and E. Solano, *Phys. Rev. B*, vol. 99, p. 014514, 2019.

[126] M. Rymarz, S. Bosco, A. Ciani, and D. P. DiVincenzo, *Phys. Rev. X*, vol. 11, p. 011032, 2021.

[127] D. T. Le, A. Grimsmo, C. Müller, and T. M. Stace, *Phys. Rev. A*, vol. 100, p. 062321, 2019.

[128] W. Oliver, in *Quantum Information Processing*, D. DiVincenzo, Ed. Jülich: Forschungszentrum, Zentralbibliothek, 2013, lecture notes of the 44th IFF spring school 2013.

[129] M. Spiecker, A. I. Pavlov, A. Shnirman, and I. M. Pop, "Solomon equations for qubit and two-level systems," *arXiv:2307.06900*, Jul. 2023.

[130] J. Burnett, A. Bengtsson, M. Scigliuzzo, D. Niepce, M. Kudra, P. Delsing, and J. Bylander, *npj Quantum Inf.*, vol. 5, 2019.

[131] T. Thorbeck, A. Eddins, I. Lauer, D. T. McClure, and M. Carroll, *PRX Quantum*, vol. 4, p. 020356, 2023.

[132] P. Fischer and G. Catelani, *Phys. Rev. Appl.*, vol. 19, p. 054087, 2023.

[133] D. Ristè, C. C. Bultink, K. W. Lehnert, and L. DiCarlo, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 109, p. 240502, 2012.

[134] A. O. Caldeira and A. J. Leggett, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 46, p. 211, 1981.

[135] A. Parra-Rodriguez and I. L. Egusquiza, *Phys. Rev. B*, vol. 106, p. 054504, 2022.

[136] R. Schoelkopf, A. Clerk, S. Girvin, K. Lehnert, and M. Devoret, in *Quantum Noise in Mesoscopic Physics*, 2003, p. 175.

[137] A. A. Houck, J. A. Schreier, B. R. Johnson, J. M. Chow, J. Koch, J. M. Gambetta, D. I. Schuster, L. Frunzio, M. H. Devoret, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 101, p. 080502, 2008.

[138] M. Cattaneo and G. S. Paraoanu, vol. 4, p. 2100054, 2021.

[139] M. Göppl, A. Fragner, M. Baur, R. Bianchetti, S. Filipp, J. M. Fink, P. J. Leek, G. Puebla, L. Steffen, and A. Wallraff, *J. Appl. Phys.*, vol. 104, p. 113904, 2008.

[140] A. Gyenis, A. D. Paolo, J. Koch, A. Blais, A. A. Houck, and D. I. Schuster, *PRX Quantum*, vol. 2, 2021.

[141] D. Gottesman, A. Kitaev, and J. Preskill, *Phys. Rev. A*, vol. 64, p. 012310, 2001.

[142] P. Campagne-Ibarcq *et al.*, *Nature*, vol. 584, p. 368, 2020.

[143] A. Roy and M. Devoret, vol. 17, p. 740, 2016.

[144] A. A. Clerk, M. H. Devoret, S. M. Girvin, F. Marquardt, and R. J. Schoelkopf, *Rev. Mod. Phys.*, vol. 82, p. 1155, 2010.

[145] H. Goldstein, C. P. Poole, and J. L. Safko, *Classical Mechanics*, 3rd ed. Addison-Wesley, 2001.

[146] D. P. DiVincenzo, F. Brito, and R. H. Koch, *Phys. Rev. B*, vol. 74, p. 014514, 2006.

[147] M. Born and R. Oppenheimer, vol. 389, p. 457, 1927.

[148] R. M. Foster, vol. 3, pp. 259–267, 1924.

[149] L. L. Egusquiza and A. Parra-Rodriguez, *Phys. Rev. B*, vol. 106, p. 024510, 2022.